绝密★本科目考试启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x\le 1\}$，$N=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x\le 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x|-1<x<4\}$

2. 已知 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $z=$（　　）.

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. 1

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 15　　B. 6　　C. -4　　D. -13

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知 $f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$，$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 记水的质量为 $d=\dfrac{S-1}{\ln n}$，并且 d 越大，水质量越好. 若 S 不变，且 $d_1=2.1$，$d_2=2.2$，则 n_1 与 n_2 的关系为（　　）

A. $n_1<n_2$

B. $n_1>n_2$

C. 若 $S<1$，则 $n_1<n_2$；若 $S>1$，则 $n_1>n_2$；

D. 若 $S<1$，则 $n_1>n_2$；若 $S>1$，则 $n_1<n_2$；

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　C. $2\sqrt{3}$　　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知$\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$是函数 $y=2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$　　　B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　　　D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 若集合$\left\{\left(x,y\right)|\,y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\right\}$表示的图形中，两点间最大距离为 d、面积为 S，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为________.

12. 已知$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且$\alpha$与$\beta$的终边关于原点对称，则$\cos\beta$ 的最大值为________.

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，则过$\left(3,0\right)$且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为________.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列．第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为________.

15. 已知$M=\left\{k\,|\,a_k=b_k\right\}$，$a_n$，$b_n$ 不为常数列且各项均不相同，下列正确的是______.

①a_n，b_n 均为等差数列，则 M 中最多一个元素；

②a_n，b_n 均为等比数列，则 M 中最多三个元素；

③a_n 为等差数列，b_n 为等比数列，则 M 中最多三个元素；

④a_n 单调递增，b_n 单调递减，则 M 中最多一个元素.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在△ABC 中，$a=7$，A 为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

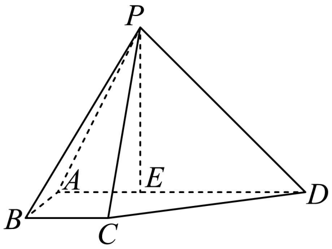
（1）求$\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求△ABC 的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E 是 AD 上一点，$PE\perp AD$.



（1）若 F 是 PE 中点，证明：$BF//$ 平面 PCD.

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

（1）求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

（2）（i）毛利润是保费与赔偿金额之差．设毛利润为 X，估计 X 的数学期望；

（ii）若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降 4%，已赔偿过的增加 20%．估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

19. 已知椭圆方程 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过 $\left(0,t\right)$ $\left(t>\sqrt{2}\right)$ 的直线 l 与椭圆交于 A，B，$C\left(0,1\right)$，连接 AC 交椭圆于 D.

（1）求椭圆方程和离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t.

20. 已知 $f\left(x\right)=x+k\ln\left(1+x\right)$ 在 $\left(t,f\left(t\right)\right)\left(t>0\right)$ 处切线为 l.

（1）若 $k=-1$，求 $f\left(x\right)$ 单调区间；

（2）证明：切线 l 不经过 $\left(0,0\right)$；

（3）已知 $k=1$，$A\left(t,f\left(t\right)\right)$，$C\left(0,f\left(t\right)\right)$，$O\left(0,0\right)$，其中 $t>0$，切线 l 与 y 轴交于点 B 时．当 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的 A 的个数为？

（参考数据：$1.09<\ln3<1.10$，$1.60<\ln5<1.61$，$1.94<\ln7<1.95$）

21. 设集合 $M=\left\{\left(i,j,s,t\right)\middle|i\in\left\{1,2\right\},j\in\left\{3,4\right\},s\in\left\{5,6\right\},t\in\left\{7,8\right\},2\left|\left(i+j+s+t\right)\right.\right\}$．对于给定有穷数列

$A:\{a_n\}(1\le n\le 8)$，及序列$\Omega:\omega_1,\omega_2,...,\omega_s$， $\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换$T$：将数列A的第$i_1,j_1,s_1,t_1$项加1，得到数列$T_1(A)$；将数列$T_1(A)$的第$i_2,j_2,s_2,t_2$列加1，得到数列$T_2T_1(A)$...；重复上述操作，得到数列$T_s...T_2T_1(A)$，记为$\Omega(A)$.

（1）给定数列$A:1,3,2,4,6,3,1,9$和序列$\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出$\Omega(A)$；

（2）是否存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为$a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的$\Omega$；若不存在，请说明理由；

（3）若数列A的各项均为正整数，且$a_1+a_3+a_5+a_7$为偶数，证明："存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为常数列"的充要条件为"$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$".

绝密★本科目考试启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

【1 题答案】

【答案】A

【2 题答案】

【答案】C

【3 题答案】

【答案】C

【4 题答案】

【答案】B

【5 题答案】

【答案】A

【6 题答案】

【答案】B

【7 题答案】

【答案】C

【8 题答案】

【答案】D

【9 题答案】

【答案】A

【10 题答案】

【答案】C

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

【11 题答案】

【答案】$(4,0)$

【12 题答案】

【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【13 题答案】

【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【14 题答案】

【答案】$\frac{115}{2}\text{mm},23\text{mm}$

【15 题答案】

【答案】①③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

【16 题答案】

【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）选择①无解；选择②和③$\triangle ABC$ 面积均为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【17 题答案】

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{30}}{30}$

【解析】(1)证明：$\because AD=3, DE=2, \therefore AE=1, \therefore AE=BC$，$AE \parallel BC$,

$\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

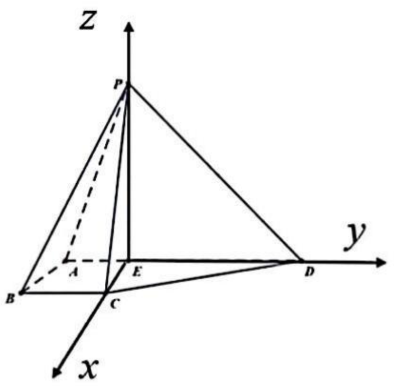
延长 EB, DC 交于点 G，则 $BC=\frac{1}{2}ED, BC \parallel ED$,

$\therefore BC$ 为$\triangle GED$ 的中位线.

∵B 为 GE 中点，∴BF 为 $\triangle EPG$ 中位线，

∴$BF // PG$，G 在 CD 上，$PG \subset$ 平面 PCD，∴$BF //$ 平面 PCD.

(2)∵$AB \perp$ 平面 PED, EP, ED, EC 相互垂直，如图建系，



∴ $P(0,0,2)$，$A(0,-1,0), C(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,0,0), \overrightarrow{AP}=(0,1,2), \overrightarrow{n_1}=(0,2,-1), \overrightarrow{n_2}=(2,1,1)$，

∴ $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

【18 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{1}{10}$

（2）(i)0.122 万元　　(ii) 0.1252 万元

【19 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$t=2$

【20 题答案】

【答案】（1）单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.　　（2）证明见解析　　（3）2

【解析】（1） $f(x)=x-\ln(1+x)$， $f^{'}(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ （x>-1），

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

（2） $f^{'}(x)=1+\frac{k}{1+x}$， $Y-f(t)=\left[1+\frac{k}{1+t}\right](x-t)$ $(t>0)$.

将$(0,0)$ 代入则 $-f(t)|=-t\left[1+\frac{k}{1+t}\right)$, $f(t)=t\left(1+\frac{k}{1+t}\right)$,

$t+k\ln(1+t)=t+t\frac{k}{1+t},\ln(1+t)=\frac{t}{1+t},\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=0.$

令$F(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$.反证法：假过$l$过$(0,0)$，则$F(t)$在t∈$(0,+\infty)$存在零点.

$F^{'}(t)=\frac{1}{|1+t}-\frac{1+t-t}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2}>0$.$\therefore$ $F(t)$在(0，+∞)上单调递增，$F(t)>F(0)=0$

$\therefore$ $F(t)$在（0,+∞）无零点，$\therefore$ 与假设予盾，故l不过$(0,0)$.

（3） （3）$k=1$时，$f(x)=x+\ln(1+x), f^{'}(x)=1+\frac{1}{1+x}=\frac{x+2}{1+x}>0$.

$S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}tf(t)$，设$l$ 与 y 轴交点B 为 $(0,q)$.,

则 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}qt$.

$t>0$ 时，若 $q<0$，则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知 $q\neq 0$，所以 $q>0$，且 $q=\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}$.

$\therefore 2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，$2tf(t)=15\left[\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}\right]t$，

$\therefore 13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}=0$，记 $h(x)=13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}$（$t>0$）.

∴满足条件的 A 有 几个即 $h(x)$ 有几个零点.

$$h'(x)=\frac{13}{1+t}-2-15\left[\frac{1}{(t+1)^2}\right]=\frac{13t+13-2\left(t^2+2t+1\right)-15}{(t+1)^2}=\frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+t)^2}$$

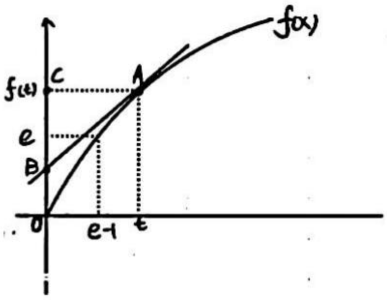
$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减，$\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 上单调递调，在 $(4+\infty)$ 上单调递减.

$h(0)=0,\quad h\left(\dfrac{1}{2}\right)<0,\quad h(4)=13\ln 5-20>13\times 1.6-20=0.8>0,$

$h(999)<0$，所以由零点定理及 $h(x)$ 的单调性，$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 上必有一个零点，$(4,999)$

上必有一个零点.

综上所述，$h(x)$ 有两个零点，即满足 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 的 A 有两个.



【21 题答案】

【答案】（1）$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$

（2）不存在符合条件的 Ω，理由略

（3）略