绝密★本科目考试启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

【1 题答案】

【答案】A

【2 题答案】

【答案】C

【3 题答案】

【答案】C

【4 题答案】

【答案】B

【5 题答案】

【答案】A

【6 题答案】

【答案】B

【7 题答案】

【答案】C

【8 题答案】

【答案】D

【9 题答案】

【答案】A

【10 题答案】

【答案】C

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

【11 题答案】

【答案】$(4,0)$

【12 题答案】

【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【13 题答案】

【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【14 题答案】

【答案】$\frac{115}{2}$mm,23mm

【15 题答案】

【答案】①③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

【16 题答案】

【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）选择①无解；选择②和③$\triangle ABC$ 面积均为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【17 题答案】

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{30}}{30}$

【解析】(1)证明：$\because AD=3, DE=2, \therefore AE=1, \therefore AE=BC$，$AE \parallel BC$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

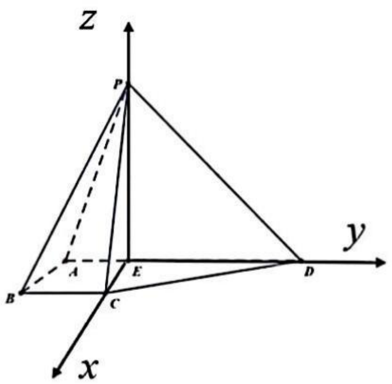
延长 EB, DC 交于点 G，则 $BC=\frac{1}{2}ED, BC \parallel ED$，

$\therefore BC$ 为$\triangle GED$ 的中位线.

$\because B$ 为 GE 中点，$\therefore BF$ 为 $\triangle EPG$ 中位线，

$\therefore BF // PG$，G 在 CD 上，$PG \subset$ 平面 PCD，$\therefore BF //$ 平面 PCD.

(2) $\because AB \perp$ 平面 PED, EP, ED, EC 相互垂直，如图建系，



$\therefore P(0,0,2)$，$A(0,-1,0), C(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,0,0), \overrightarrow{AP}=(0,1,2), \overrightarrow{n_1}=(0,2,-1), \overrightarrow{n_2}=(2,1,1)$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

【18 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{1}{10}$

（2）(i)0.122 万元　　(ii) 0.1252 万元

【19 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$t=2$

【20 题答案】

【答案】（1）单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.　　（2）证明见解析　　（3）2

【解析】（1）$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$（$x$>-1），

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

（2）$f'(x)=1+\dfrac{k}{1+x}$，$Y-f(t)=\left[1+\dfrac{k}{1+t}\right](x-t)\quad(t>0)$.

将$(0,0)$ 代入则 $-f(t)|=-t\left[1+\dfrac{k}{1+t}\right)$，$f(t)=t\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)$，

$t+k\ln(1+t)=t+t\dfrac{k}{1+t},\ln(1+t)=\dfrac{t}{1+t},\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=0.$

令$F(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$.反证法：假过 l 过$(0,0)$，则$F(t)$ 在 t∈$(0,+\infty)$存在零点.

$F'(t)=\dfrac{1}{|1+t}-\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}=\dfrac{t}{(1+t)^2}>0$.$\therefore$ $F(t)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$F(t)>F(0)=0$

$\therefore$ $F(t)$在（$0,+\infty$）无零点，$\therefore$ 与假设予盾，故 l 不过$(0,0)$.

（3）（3）$k=1$时，$f(x)=x+\ln(1+x),f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x+2}{1+x}>0$.

$S_{\triangle ACO}=\dfrac{1}{2}tf(t)$，设 l 与 y 轴交点 B 为 $(0,q)$.,

则 $S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}qt$.

$t>0$ 时，若 $q<0$，则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知 $q\neq 0$，所以 $q>0$，且 $q=\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}$.

$\therefore 2S_{\square ACO}=15S_{\square ABO}$，$2tf(t)=15\left[\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}\right]t$，

$\therefore 13\ln(1+t)-2t-15\frac{t}{1+t}=0$，记 $h(x)=13\ln(1+t)-2t-15\frac{t}{1+t}$（$t>0$）.

∴满足条件的 A 有 几个即 $h(x)$ 有几个零点.

$$h'(x)=\frac{13}{1+t}-2-15\left[\frac{1}{(t+1)^2}\right]=\frac{13t+13-2(t^2+2t+1)-15}{(t+1)^2}=\frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+t)^2}$$

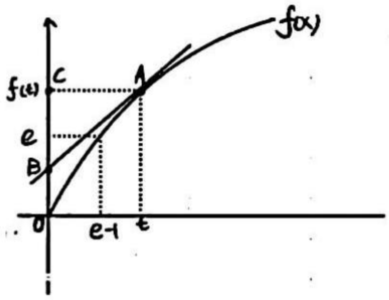
$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，$\left(\frac{1}{2},4\right)$上单调递调，在 $(4+\infty)$ 上单调递减.

$h(0)=0,\quad h\left(\frac{1}{2}\right)<0,\quad h(4)=13\ln 5-20>13\times 1.6-20=0.8>0,$

$h(999)<0$，所以由零点定理及 $h(x)$ 的单调性，$h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},4\right)$ 上必有一个零点，$(4,999)$

上必有一个零点.

综上所述，$h(x)$ 有两个零点，即满足 $2S_{\square ACO}=15S_{\square ABO}$ 的 A 有两个.



【21 题答案】

【答案】（1）$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$

（2）不存在符合条件的 Ω，理由略

（3）略