2024年上海市高考数学试卷解析(回忆版)

2024.06

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1．设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$A=\{2,4\}$，求$\overline{A}=$________.

【考点】补集

【答案】$\overline{A}=\{1,3,5\}$

2．已知$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x>0\\1,x\le 0\end{cases}$，$f(3)=$________.

【考点】分段函数

【答案】$\sqrt{3}$

3．$x\in R,x^2-2x-3<0$的解集为________.

【考点】解一元二次不等式

【答案】$(-1,3)$

4．已知$F(x)=x^3+a$,已知$F(x)$是奇函数，$x\in R$，$a=$________.

【考点】函数奇偶性

【答案】0

【解析】由题可知，$F(0)=0$,则$a=0$

5．已知$k\in R$, $\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(6,k)$, $\vec{a}//\vec{b}$,则k的值为________.

【考点】平面向量

【答案】15

【解析】由题可知，$2k=5\times 6$,则$k=15$

6．在$(x+1)^n$的二项展开式中，若各项系数和为32，则x^2项的系数为________.

【考点】二项式定理

【答案】10

【解析】由题可知，展开式中各项系数的和是$(1+1)^n=32$,所以$n=5$，该二项式的通项公式是$T_{r+1}=C_5^r\cdot x^{5-r}\cdot 1^r$，

令$5-r=2$, $r=3$,得$C_5^3=10$

7．已知抛物线$y^2=4x$上有一点P到准线的距离为9，那么P到x轴的距离为________.

【考点】抛物线的定义

【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】设P坐标为(x_0,y_0)，P到准线的距离为9，即$x_0+1=9$，$x_0=8$，代入抛物线方程，可得$y_0=\pm4\sqrt{2}$，则P到x轴的距离为$4\sqrt{2}$

8. 某校举办科学竞技比赛，有A、B、C 3种题库，A题库有5000道题，B题库有4000道题，C题库有3000道题．小申已完成所有题，他A题库的正确率是0.92，B题库的正确率是0.86，C题库的正确率是0.72．现他从所有的题中随机选一题，正确率是__________．

【考点】全概率公式

【答案】$\frac{17}{20}$

【解析】由题可知，A题库占比为$\frac{5}{12}$，B题库占比为$\frac{1}{3}$，C题库占比为$\frac{1}{4}$，$P=\frac{5}{12}\times0.92+\frac{1}{3}\times0.86+\frac{1}{4}\times0.72=\frac{17}{20}$

9. 已知虚数z，其实部为1，且$z+\frac{2}{z}=m$（$m\in R$），则实数m为__________．

【考点】复数的运算

【答案】2

【解析】设$z=1+bi(b\neq0)$，

所以$z+\frac{2}{z}=1+bi+\frac{2}{1+bi}=1+bi+\frac{2\cdot(1-bi)}{1+b^2}=1+\frac{2}{1+b^2}+\left(b-\frac{2b}{1+b^2}\right)i$，

因为$m\in R$，所以$b-\frac{2b}{1+b^2}=0$，解得$b=\pm1$，所以$m=1+\frac{2}{1+b^2}=1+1=2$．

10. 设集合A中的元素皆为无重复数字的三位正整数且元素中任意两者之积皆为偶数，求集合中元素个数的最大值__________．

【考点】排列组合、集合的性质

【答案】329

【解析】由题可知，集合A中每个元素都互异的，且元素中最多有一个奇数，剩余全是偶数．

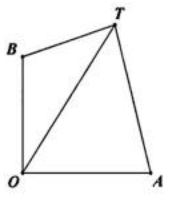
先研究集合中无重复数字的三位偶数：

(1)若个位为0，这样的偶数有$P_9^2=72$种；

(2)若个位不为0，这样的偶数有$C_4^1\cdot C_8^1\cdot C_8^1=256$种；

所以集合元素个数最大值为256+72+1=329种．

11. 已知A在O正东方向，B在O的正北方向，O到A、B距离相等，$\angle BTO=16.5^\circ$，$\angle ATO=37^\circ$，则$\angle BOT=$__________．(精确到0.1度)



【考点】解三角形

【答案】7.8°

【解析】不妨设$OA=OB=a,BT=b,AT=c$，则$AB=\sqrt{2}a$

所以在ΔABT中，$\left(\sqrt{2}a\right)^2=b^2+c^2-2bc\cos 53.5^\circ$　　①

在ΔOBT中，$\dfrac{a}{\sin 16.5^\circ}=\dfrac{b}{\sin\angle BOT}$　　②

在ΔOAT中，$\dfrac{a}{\sin 37^\circ}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\angle BOT\right)}$　　③

①②③联立$\angle BOT\approx 7.8^\circ$

12．等比数列$\{a_n\}$首项$a_1>0$，$q>1$，记$\ln=\{x-y|x,y\in[a_1,a_2]\cup[a_n,a_{n+1}]\}$，若对任意正整数$n$，ln是闭区间，则$q$的范围是__________.

【考点】数列

【答案】$[2,+\infty)$

【解析】由题不妨设$x>y$，若x,y均在$[a_1,a_2]$，则有$x-y\in[0,a_2-a_1]$，若x,y均在$[a_n,a_{n+1}]$，则有$x-y\in[0,a_{n+1}-a_n]$，若x,y分别在两个区间则$x-y\in[a_n-a_2,a_{n+1}-a_1]$，又因为$q>1$，总有ln是闭区间，则$a_n-a_2\le a_{n+1}-a_n$恒成立即可，化简得$q^{n-1}(q-2)+q\ge 0$，所以有$q\ge 2$恒成立

二、选择题（本大题共4题，满分18分，第13-14题每题4分，第15-16题每题5分）

13．已知气候温度和海水表层温度相关，且相关系数为正数，对此描述正确的是（　　）

A．气候温度高，海水表层温度就高

B．气候温度高，海水表层温度就低

C．随着气候温度由低到高，海水表层温度呈上升趋势

D．随着气候温度由低到高，海水表层温度呈下降趋势

【考点】成对数据相关分析

【答案】C

【解析】成对数据相关分析中，若相关系数为正数，当x的值由小变大，y的值具有由小变大的变化趋势，故A,B,D选项错误，答案选C.

14．下列函数$f(x)$的最小正周期是2π的是(　　)

A．$\sin x+\cos x$　　B．$\sin x\cos x$

C．$\sin^2 x+\cos^2 x$　　D．$\sin^2 x-\cos^2 x$

【考点】三角函数的周期性

【答案】A

【解析】对于A，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则$T=2\pi$，满足条件，故A正确；

对于B，$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，则$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，不满足条件，故B错误；

对于C，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，为常值函数，则不存在最小正周期，不满足条件，故C错误；

对于D，$\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$，则$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，不满足条件，故D错误；故答案选A.

15．定义一个集合Ω，集合元素是空间内的点集，任取$P_1,P_2,P_3\in\Omega$，存在不全为0的实数λ_1，λ_2，λ_3，使得$\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$.已知$(1,0,0)\in\Omega$，则$(0,0,1)\notin\Omega$的充分条件是(　　)

A．(0，0，0)　　　　B．(-1，0，0)

C．(0，1，0)　　　　D．(0，0，-1)

【考点】空间向量

【答案】C

【解析】因为λ_1，λ_2，λ_3不全为0，$\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$，所以三个向量无法构成三维空间坐标系的一组基

又因为$(1,0,0)\in\Omega$，所以对于A，三者可以构成一组基，故不能推出$(0,0,1)\notin\Omega$，故A错误；

对于B，若（1，0，0），(-1，0，0）均属于Ω，且（1，0，0），(-1，0，0）共线，所以（0，0，1）可以属于Ω，此时三者不共面，故B错误；

对于C，显然，三者可以构成一组基，与条件不符合，故可以推出$(0,0,1)\notin\Omega$，故C正确；

对于D，三者无法构成一组基，故不能推出$(0,0,1)\notin\Omega$，故D错误．故答案选C.

16．定义集合$M=\{x_0\mid x_0\in R,x\in(-\infty,x_0),f(x)<f(x_0)\}$，在使得$M=[-1,1]$的所有$f(x)$中，下列成立的是(　　)

A．$f(x)$是偶函数　　　　B．$f(x)$在$x=2$处取最大值

C．$f(x)$严格增　　　　D．$f(x)$在$x=-1$处取到极小值

【考点】函数的性质

【答案】D

【解析】$x<x_0$时，$f(x)<f(x_0)$，又因为$M=[-1,1]$，所以$f(x)<f(-1)$，当$x_0\in[-1,1]$且$x\in[-1,1)$时，$f(x)<f(x_0)$恒成立，说明在$[-1,1]$上，函数单调递增，故A错误；

对于B，$f(x)<f(-1)$且在$[-1,1]$上，函数单调递增，故函数在$(-\infty,1]$上最大值为$f(1)$，若函数$f(x)$在$x>1$时，$f(x)>f(1)$，则M的集合不会是$[-1,1]$，所以在1处取到极大值，在2处不一定取最大值，故B错误；

对于C，在$x<-1$时，若函数$f(x)$严格增，则集合M的取值不会是$[-1,1]$，而是全体定义域，故C错误·

对于D，因为当$x<-1$时，$f(x)<f(-1)$，所以-1左侧不是单调递减，若左侧单调递增，或者在某一段单调递增，

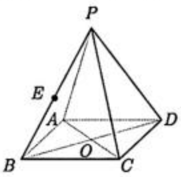
则M的集合不会是$[-1,1]$，所以在-1左侧相邻一段是常函数，又因为在$[-1,1]$上，函数单调递增，故D正确.

三、解答题（本大题共5题，共14+14+14+18+18=78分）

17．如图为正四棱锥$P-ABCD$，O为底面$ABCD$的中心.

(1)若$AP=5$，$AD=3\sqrt{2}$，求$\triangle POA$绕PO旋转一周形成的几何体的体积；

(2)若$AP=AD$，E为PB的中点，求直线BD与平面AEC所成角的大小.



【考点】立体几何

【答案】(1) 12π；(2) $\frac{\pi}{4}$

【解析】(1) 因为$P-ABCD$是正四棱锥，所以底面$ABCD$是正方形，且$OP\perp$底面$ABCD$，

因为$AD=3\sqrt{2}$，所以$AO=OD=OB=OC=3$，

因为$AP=5$，所以$PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=4$，

所以$\triangle POA$绕OP旋转一周形成的几何体是以3为底面半径，4为高的圆锥，

所以$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 4=12\pi$.

(2)如图建立空间直角坐标系，因为$AP=AD$，由题知$P-ABCD$是正四棱锥，所以该四棱锥各棱长相等，设$AB=\sqrt{2}a$，

则$AO=OD=OB=OC=a$，$PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=a$，

则可得$O(0,0,0),P(0,0,a),A(0,-a,0),B(a,0,0),C(0,a,0),D(-a,0,0),E\left(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2}\right)$，

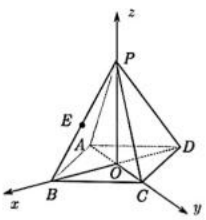
故$\overrightarrow{BD}=(-2a,0,0),\overrightarrow{AC}=(0,2a,0),\overrightarrow{AE}\left(\frac{a}{2},a,\frac{a}{2}\right)$

设$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面AEC的法向量，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\cdot y_1=0\\ \frac{a}{2}\cdot x_1+a\cdot y_1+\frac{a}{2}\cdot z_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$y_1=0,z_1=-1$，所以$n=(1,0-1)$，

则$\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BD}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{-2a}{|2a|\cdot|\sqrt{2}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设直线BD与面AEC所成角为θ，因为$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BD}\right\rangle\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$.



18．若 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$．

(1) $y=f(x)$ 过 $(4,2)$，求 $f(2x-2)<f(x)$ 的解集；

(2)存在 x 使得 $f(x+1)$、$f(ax)$、$f(x+2)$ 成等差数列，求 a 的取值范围．

【考点】对数函数、等差数列

【答案】(1) $(1,2)$；(2) $a>1$

【解析】(1) 由 $y=f(x)$ 过 $(4,2)$ 可得 $\log_a 4=2$，则 $4=a^2\Rightarrow a=\pm 2$，又 $a>0$，故 $a=2$，

因为 $f(x)=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，$f(2x-2)<f(x)\Rightarrow 0<2x-2<x\Rightarrow 1<x<2$，所以解集为 $(1,2)$．

(2) 因为 $f(x+1)$、$f(ax)$、$f(x+2)$ 成等差数列，所以 $f(x+1)+f(x+2)=2f(ax)$，

即 $\log_a(x+1)+\log_a(x+2)=2\log_a(ax)$ 有解，化简可得 $\log_a(x+1)(x+2)=\log_a(ax)^2$，

得 $(x+1)(x+2)=(ax)^2$ 且 $\begin{cases}x+1>0\\x+2>0\\ax>0\\a>0,a\neq 1\end{cases}\Rightarrow x>0$，则 $a^2=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

又 $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x}+1=2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$，故在 $(0,+\infty)$ 上，$\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}>2\left(0+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}=1$，

即 $a^2>1\Rightarrow a<-1$ 或 $a>1$，又 $a>0$，所以 $a>1$．

19．为了解某地初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系，从该地区 29000 名学生中抽取 580 人，得到日均体育锻炼时长与学业成绩的数据如下表所示：

时间范围 学业成绩	[0,0.5)	[0.5,1)	[1,1.5)	[1.5,2)	[2,2.5)
优秀	5	44	42	3	1
不优秀	134	147	137	40	27

(1)该地区 29000 名学生中体育锻炼时长大于 1 小时人数约为多少?

(2)估计该地区初中学生日均体育锻炼的时长（精确到 0.1)。

(3)是否有 0.95 的把握认为学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关?

【考点】概率统计：(1)分层抽样；(2)频率分布表求平均数；(3)2x2 列联表独立性检验

【答案】(1)12500 人；(2)0.9h；(3)学业成绩与锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 两小时有关

【解析】(1)580 人中体育锻炼时长不小于 1 小时人数占比 $P=\frac{42+3+1+137+40+27}{580}=\frac{25}{58}$

该地区 29000 名初中学生中体育锻炼时长不小于 1 小时的人数约为 $29000\times\frac{25}{58}=12500$ 人

(2)该地区初中学生锻炼平均时长约为：

$$\frac{1}{580}\left[\frac{0.5}{2}\times(5+134)+\frac{0.5+1}{2}\times(44+147)+\frac{1+1.5}{2}\times(42+137)+\frac{1.5+2}{2}\times(3+40)+\frac{2+2.5}{2}\times(1+27)\right]=\frac{27}{29}\approx 0.9\text{h}$$

(3)

	[1,2)	其他	总数
优秀	45	50	95
不优秀	177	308	485

①提出原假设 H_0 ：成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时无关。

②确定显著性水平 $\alpha=0.05, P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$

③ $\chi^2=\frac{580\times(45\times 308-177\times 50)^2}{(45+50)\times(177+308)\times(45+177)\times(50+308)}\approx 3.976>3.841$

④否定原假设，即学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关。

20．双曲线 $\Gamma: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1,(b>0)$ ，A_1,A_2 为左右顶点，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 交双曲线 Γ 于两点 P、Q，且点 P 在第一象限，

(1) $e=2$ 时，求 b .

(2) $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形时，求点 P 的坐标.

(3)过点 Q 作 OQ 延长线交 Γ 于点 R ，若 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$ ，求 b 取值范围.

【考点】解析几何

【答案】(1) $b=\sqrt{3}$ ；(2) $P(2,2\sqrt{2})$ ；(3) $b\in\ 0,\sqrt{3}$

【解析】(1)因为 $e=2$ ，即 $\frac{c}{a}=2$ ，所以 $\frac{c^2}{a^2}=4$.因为 $a^2=1$ ，所以 $c^2=4$.

因为 $a^2+b^2=c^2$ ，所以 $b^2=3$ ，所以 $b=\sqrt{3}$ （负舍）.

(2)因为 $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形，

①若 MA_2 为底，则点 P 在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 时，与 P 在第一象限矛盾，故舍去.

②若 A_2P 为底，则 $MP=MA_2$ ，与 $MP>MA_2$ 矛盾，故舍去.

③若 MP 为底，则 $MA_2=PA_2$ ，设 $P(x_0,y_0)$，$x_0>0, y_0>0$.

则 $\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0-0)^2}=3$，即 $(x_0-1)^2+{y_0}^2=9$，又因为 ${x_0}^2-\frac{{y_0}^2}{\frac{8}{3}}=1$，

得 $(x_0-1)^2+(x_0-1)^2\times\frac{8}{3}=9$，得 $11{x_0}^2-6x_0-32=0$，得 $x_0=2, y_0=2\sqrt{2}$，即 $P(2,2\sqrt{2})$.

(3) 由 $A_1(-1,0)$，设 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$，则 $R(-x_2,-y_2)$，设直线 $l: x=my-2(m>\frac{1}{b})$

联立 $\begin{cases} x=my-2(m>\frac{1}{b}) \\ x^2-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得 $(b^2m^2-1)y^2-4b^2my+3b^2=0$，则 $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{4b^2m}{b^2m^2-1} \\ y_1\cdot y_2=\frac{3b^2}{b^2m^2-1} \end{cases}$

$\overrightarrow{A_1R}=(-x_2+1,-y_2), \overrightarrow{A_2P}=(x_1-1,y_1)$，又由 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$，得 $(-x_2+1)(x_1-1)-y_1y_2=1$

即 $(x_2-1)(x_1-1)+y_1y_2=-1$，即 $(my_2-3)(my_1-3)+y_1y_2=-1$

化简后可得到 $(m^2+1)y_1y_2-3m(y_1+y_2)+10=0$

再由韦达定理得 $3b^2(m^2+1)-12m^2b^2+10(b^2m^2-1)=0$，化简：$b^2m^2+3b^2-10=0$

所以 $m^2=\frac{10-3b^2}{b^2}>\frac{1}{b^2}$ 得 $b^2<3$，又 $b>0$，得 $b\in(0,\sqrt{3})$

21．对于一个函数 $f(x)$ 和一个点 $M(a,b)$，令 $s(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$，若 $P(x_0,f(x_0))$ 是 $s(x)$ 取到最小值的点，则称 P 是 M 在 $f(x)$ 的最近点

(1)对于 $f(x)=\frac{1}{x}, D=(0,+\infty)$，求证：对于点 $M(1,0)$，存在点 P，使得 P 是 M 在 $f(x)$ 的最近点；

(2)对于 $f(x)=e^x, D=R$，$M(1,0)$，请判断是否存在一个点 P，它是 M 在 $f(x)$ 最近点，且直线 MP 与 $f(x)$ 在点 P 处的切线垂直；

(3)题干缺失

【考点】导数

【答案】(1)见解析(2)存在点 $P(0,1)$ 使直线 MP 于 $f(x)$ 在点 P 处的切线垂直(3)略

【解析】(1) 证明：$s(x)=(x-0)^2+(\frac{1}{x}-0)^2=x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=2$，当且仅当 $x^2=\frac{1}{x^2}$ 即 $x=1$ 时取到最小值，所以对于点 $M(0,0)$ 存在点 $P(1,1)$ 使得 P 是 M 在 $f(x)$ 的最近点

(2) $s(x)=(x-1)^2+(e^x-0)^2=(x-1)^2+e^{2x}$，$s'(x)=2(x-1)+2e^{2x}$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$s'(x)$	负	0	正
$s(x)$	严格减	极小值	严格增

所以当 $x=0$ 时，$s(x)$ 取到最小值，此时点 $P(0,1)$，$f'(x)=e^x, k=e^0=1$，$f(x)$ 在点 P 处的切为

$y=x+1, k_{MP}=\frac{0-1}{1-0}=-1$，此时 $k_{MP}\cdot k=-1$，所以存在点 $P(0,1)$ 使直线 MP 于 $f(x)$ 在点 P 处的切线垂