2024 高考数学新课标 I 卷

试题解析

一、选择题

1.已知集合 $A=\left\{x\mid -5<x^3<5\right\},B=\left\{-3,-1,0,2,3\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

解：对 $A: x\in(-\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5})$，且 $-2<-\sqrt[3]{5}<-1$，$1<\sqrt[3]{5}<2$，故 $A\bigcap B=\{-1,0\}$，

故选 A.

2.若 $\dfrac{z}{z-1}=1+i$，则 $z=$（　　）

A. $-1-i$　　B. $-1+i$　　C. $1-i$　　D. $1+i$

解：$\dfrac{z}{z-1}=1+i\Leftrightarrow z=(z-1)\cdot(1+i)=z+z\cdot i-1-i\Leftrightarrow z\cdot i=1+i\Leftrightarrow z=\dfrac{1+i}{i}=1-i$，

故选 C.

3.已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$，则 $x=$（　　）

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

解：$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})\Leftrightarrow\vec{b}\cdot(\vec{b}-4\vec{a})=0$，而 $\vec{b}-4\vec{a}=(2,x-4)$，

则 $\vec{b}\cdot(\vec{b}-4\vec{a})=4+x(x-4)=(x-2)^2=0$，$x=2$，故选 D.

4.已知 $\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

解：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m,$

$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2,$ 即 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

解得 $\cos\alpha\cos\beta=-m,\sin\alpha\sin\beta=-2m,$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m.$

故选 A.

5.已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等， 且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

解：设圆柱及圆锥的底面半径为 r，圆柱的母线为 l_1，圆锥的母线为 l_2

由侧面积相等可得：$2\pi rl_1=\pi rl_2$，即 $2l_1=l_2$

又由圆柱的母线为 l_1 等于高为 $\sqrt{3}$，故 $l_2=2\sqrt{3}$

$r^2={l_2}^2-(\sqrt{3})^2=9$，圆锥的 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=3\sqrt{3}\pi$

故选：B.

6.已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\e^x+\ln(x+1),x\geq 0\end{cases}$ 在 R 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

解：由 $\mathrm{e}^x+\ln(x+1)$ 为增函数

故此分段函数在 R 上递增，只需满足：

① $-\frac{-2a}{-2}=-a\geqslant 0$

② $-a\leqslant 1$，

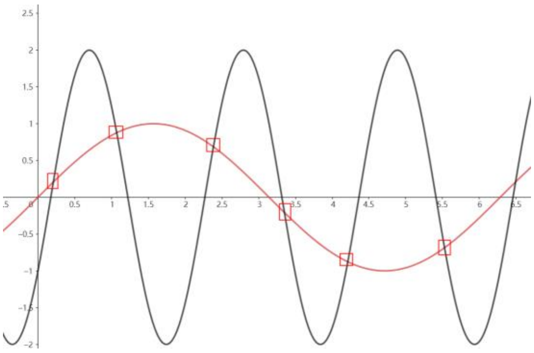
解得：$-1\leqslant a\leqslant 0$.

故选：B.

7.当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（　　）

A.3　　　　B.4　　　　C.6　　　　D.8

解：当 $x\in[0,2\pi]$，分别做出 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图像(五点作图法)，如下



由图像可知，两个函数有 6 个交点

故本题选：C .

8.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$　　C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

解：由已知可得 $f(1)=1, f(2)=2$.则

$$
\begin{aligned}
&f(3)>f(2)+f(1)=3\\
&f(4)>f(3)+f(2)>5\\
&f(5)>f(4)+f(3)>8\\
&f(6)>f(5)+f(4)>13\\
&f(7)>f(6)+f(5)>21\\
&f(8)>f(7)+f(6)>34\\
&f(9)>f(8)+f(7)>56\\
&f(10)>f(9)+f(8)>90\\
&f(11)>f(10)+f(9)>146\\
&f(12)>f(11)+f(10)>236\\
&f(13)>f(12)+f(11)>382\\
&f(14)>f(13)+f(12)>618\\
&f(15)>f(14)+f(13)>1000
\end{aligned}
$$

显然 $f(20)>f(15)>1000$，故选 B

二、多选题

9.为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x}=2.1$，样本方差 $S^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N\left(\bar{x},S^2\right)$，则（　　）

（若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left(Z<\mu+\sigma\right)\approx 0.8413$）

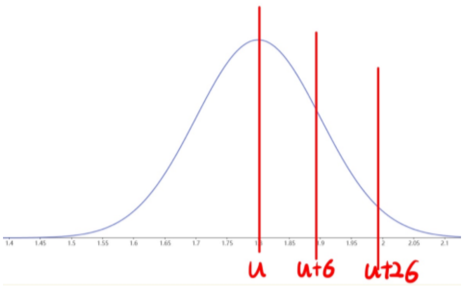
A. $P\left(X>2\right)>0.2$　　B. $P\left(X>2\right)<0.5$　　C. $P\left(Y>2\right)>0.5$　　D. $P\left(Y>2\right)<0.8$

解：出口前的亩收入符合正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，故概率密度曲线的对称轴为 1.8，标准差为 0.1

$P(x<u+\sigma)\approx 0.8413$，$P(x>u+\sigma)=1-P(x<u+\sigma)\approx 0.1587$

$P(x>2)=P(x>u+2\sigma)<P(x>u+\sigma)=0.1587$，

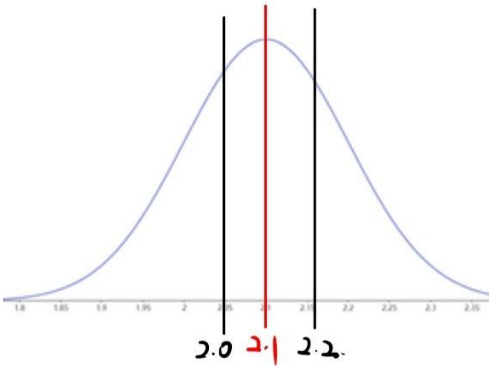
故选项 B 正确；



出口后的亩收入符合正态分布 $N(2.1,0.1^2)$，故概率密度曲线的对称轴为 2.1，标准差为 0.1

$P(Y>2)=P(Y>u-\sigma)$，$P(Y>u-\sigma)=P(Y<u+\sigma)\approx 0.8413$

故选项 C 正确；



故选：BC．

10.设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

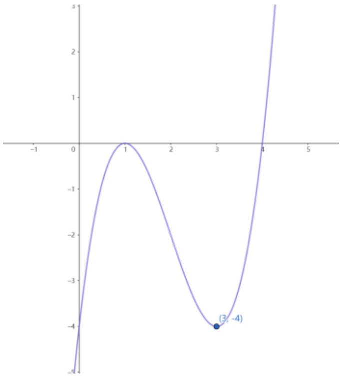
A. $x=3$是 $f(x)$ 的极小值点

B.当 $0<x<1$时， $f(x)<f\left(x^2\right)$

C.当 $1<x<2$ 时， $-4<f(2x-1)<0$

D.当 $-1<x<10$ 时， $f(2-x)>f(x)$

解： $f(x)=(x-1)^2(x-4)$， $f'(x)=(x-1)(3x-9)$，易得函数单调性及图像，如下



故 $x=3$是 $f(x)$ 的极小值点，选项 A 正确；

当 $0<x<1$时， $0<x^2<x<1$， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增

故 $f(x)>f(x^2)$，选项 B 错误；

当 $1<x<2$ 时， $1<2x-1<3$， $f(x)$ 在 $(1,3)$ 递减， $f(1)=0$， $f(3)=-4$

故 $-4<f(2x-1)<0$，选项 C 正确；

取 $x=9$，可得 $f(9)>0$， $f(2-9)=f(-7)<0$，选项 D 错误；

故选： AC .

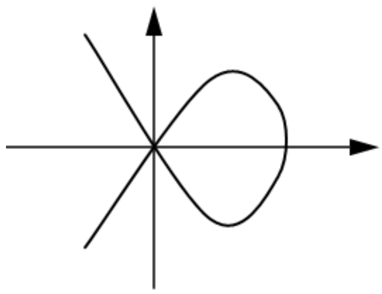
11.造型可以看作图中曲线 C 的一部分，已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足：横坐标大于-2；到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）

A. $a=-2$

B.点 $\left(2\sqrt{2},0\right)$ 在 C 上

C.C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D.当点 $\left(x_0,y_0\right)$ 在 C 上时， $y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$



解：由曲线过原点，即 $2\cdot|a|=4(a<0)$，故 $a=-2$

设曲线上一点 (x,y)，利用距离定义可得：$[(x-2)^2+y^2]\cdot(x+2)^2=16(x>2)$

带入 $(2\sqrt{2},0)$ 满足方程，可知点在曲线上

由方程可得 $y^2=\dfrac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$，设 $g(x)=\dfrac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$，发现 $g(2)=1$ 而 $g'(2)\ne0$

故 $g(x)$ 的最大值不为 $g(2)=1$

$y^2=\dfrac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2\leqslant\dfrac{16}{(x+2)^2}$，故 $y\leqslant\dfrac{4}{x+2}$.

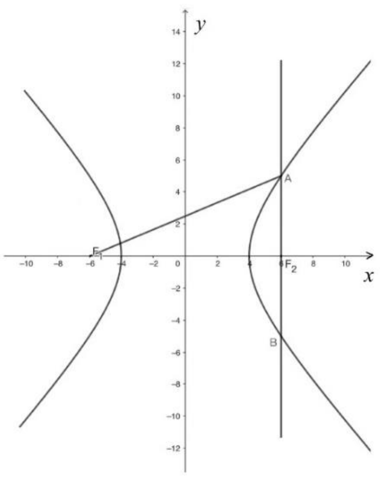
故选： ABD .

三、填空题

12.设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交C于$A,B$两点，若$|F_1A|=13,|AB|=10$，则C的离心率为________

解：如图，$|AF_2|=\frac{1}{2}|AB|=5$，$|F_1A|-|AF_2|=2a=13-5=8$，则$a=4$；

又$|AF_2|=\frac{b^2}{a}=5$，则$b^2=5a=20,c^2=a^2+b^2=36,c=6$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.



13.若曲线$y=e^x+x$在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$________

解：对$y=e^x+x,y'=e^x+1,y'|_{x=0}=2$，则切线方程为$y=2x+1$.

对$y=\ln(x+1)+a,y'=\frac{1}{x+1}$，设切点为$(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，则$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0+1}=2$，

所以$x_0=-\frac{1}{2}$，切点为$(-\frac{1}{2},-\ln 2+a)$，代入切线方程可得$a=\ln 2$.

14.甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字1,3,5,7，乙的卡片上分别标有数字 2,4,6,8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字

大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）。则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为________

解：表格为甲拿到的卡片数字与乙拿到的卡片数字对应是，甲得分的情况

乙＼甲	1	3	5	7
2	0	1	1	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	1
8	0	0	0	0

甲拿卡片的顺序有 A_4^4 种，每种顺序下和乙比较的得分情况都是一致的，故只需考虑甲依次拿到卡片上的数字依次为 1，3，5，7 的情况.甲乙所有的对应情况有 A_4^4 种.

（1）当甲得 0 分时，乙只能有 1 种顺序 2，4，6，8，则 $P_0=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$;

（2）当甲得 1 分时，甲只有一个卡片数字比乙大，情况讨论如下：

①甲得分的卡片数字为 7，与之对应的乙的卡片数字可以为 6，4，2，

当乙为 6 时，甲 5 对应乙 8，甲 3 对应乙 4，甲 1 对应乙 2，即只 1 种情况，故 $P_{1(7-6)}=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$;

当乙为 4 时，甲 1 对应乙 2，甲 3、5 可以与乙 6、8 分别对应，$P_{1(7-4)}=\frac{A_2^2}{A_4^4}=\frac{1}{12}$;

当乙为 2 时，甲 5 对应乙 6、8，甲 1、3 任意都可以，$P_{1(7-2)}=\frac{C_2^1A_2^2}{A_4^4}=\frac{1}{6}$;

②甲得分的卡片数字为 5，与之对应的乙的卡片数字可以为 4，2，

当乙为 4 时，甲 7 对应乙 8，甲 3 对应乙 6，甲 1 对应乙 2，即只 1 种情况，故 $P_{1（5-4）}=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$；

当乙为 2 时，甲 7 对应乙 8，甲 1、3 可以与乙 4、6 分别对应，$P_{1（5-2）}=\frac{A_2^2}{A_4^4}=\frac{1}{12}$；

②甲得分的卡片数字为 3，与之对应的乙的卡片数字只能为 2

甲 7 对应乙 8，甲 5 对应乙 6，甲 1 对应乙 4，即只 1 种情况，$P_{1（3-2）}=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$；

则 $P_1=\frac{1}{24}\times 3+\frac{1}{12}\times 2+\frac{1}{6}=\frac{11}{24}$.

综上，甲得分小于 2 分的概率为 $\frac{11}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$，则甲得分不小于 2 分的概率为 $\frac{1}{2}$.

四、解答题

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B, a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求角 B

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c

解：（1）由 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，可得 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $C=\frac{\pi}{4}$

又 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，故 $\cos B=\frac{1}{2}$， $B=\frac{\pi}{3}$；

（2） $b:c=\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{2}$，设 $b=\sqrt{3}k$， $c=\sqrt{2}k$， $\sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3+\sqrt{3}$，解得 $k=2$

故 $c=2\sqrt{2}$

16.已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点

（1）求 C 的离心率

（2）若过 P 的直线 l 交 C 与另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求直线 l 的方程

（1）由点 $A(0,3)$，$P(3,\frac{3}{2})$ 在椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，带入方程解得：$a^2=12$，$b^2=9$

$c^2=a^2-b^2=12-9=3$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

（2）$PA=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，由 $S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}PA\cdot h=9$，解得 $h=\frac{12}{\sqrt{5}}$

$l_{PA}:x+2y-6=0$，设过点 B 与 l_{PA} 平行的直线 l_1：$x+2y+C=0$

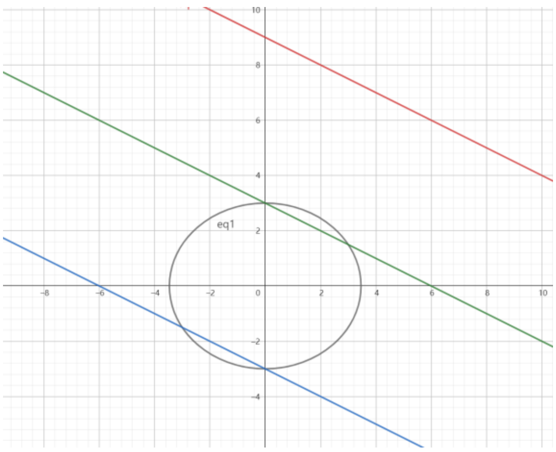
$h=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{|C+6|}{\sqrt{5}}$，解得 $\mathrm{C}=6$ 或 $\mathrm{C}=-18$，

当 $\mathrm{C}=-18$，经检验当 l_1：$x+2y-18=0$ 与椭圆相离，故舍去

当 $\mathrm{C}=6$，l_1：$x+2y+6=0$ 与 $l_{PA}:x+2y-6=0$ 关于原点对称，可得 l_1 与椭圆的交点即为点 $A(0,3)$，$P(3,\frac{3}{2})$

关于原点的对称点即 $B_1(0,-3)$、$B_2(-3,-\frac{3}{2})$，分别与 $P(3,\frac{3}{2})$ 可计算直线方程

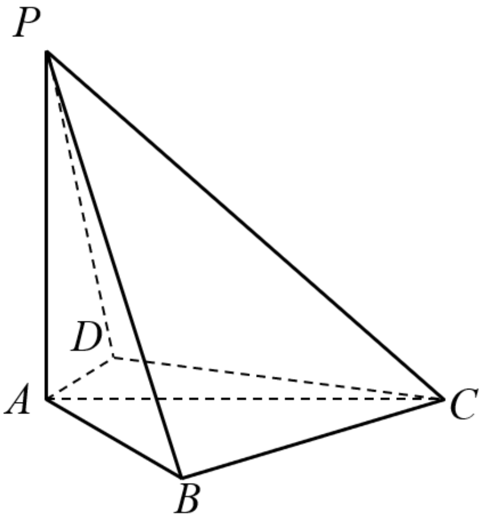
则直线 l（直线 PB）为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$



17.如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $PA=AC=2$， $BC=1$， $AB=\sqrt{3}$

（1）若 $AD\perp PB$，证明： $AD//$ 平面 PBC

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD



解（1）证明：$\because PA\perp$ 平面$ABCD$， $AD,BC\subset$ 平面$ABCD$，

$\therefore PA\perp AD, PA\perp BC$，

又 $AD\perp PB$， $PA\cap PB=P$，

$\therefore AD\perp$ 平面PAB，

又 $AC=2, BC=1, AB=\sqrt{3}$，

有 $AB^2+BC^2=AC^2$，即 $AB\perp BC$，

又 $PA\perp BC$， $PA\cap AB=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面PAB，

则 $AD// BC$，又 $BC\subset$ 平面PBC， $AD\not\subset$ 平面PBC，

$\therefore AD//$ 平面PBC.，

（2）方法一：如图，过 D 做 $DH\perp AC$，过 H 做 $HM\perp PC$，连接 DM，

$\because PA\perp$ 平面$ABCD$， $DH\subset$ 平面$ABCD$，

$\therefore PA \perp DH$， 又 $PA \cap AC = A$，

$\therefore DH \perp$平面PAC， 又 $HM \subset$平面PAC

$\therefore DH \perp HM$

则 $\sin\langle A-CP-D\rangle = \dfrac{DH}{DM}$，

设 $HM = x$，

$\because PA \perp$平面$ABCD$， $AC \subset$平面$ABCD$，

$\therefore PA \perp AC$，

$\because PA = AC = 2$， $\therefore \angle PCA = \dfrac{\pi}{4}$， 又 $HM \perp PC$，

$\therefore HC = \sqrt{2}x$， $AH = 2 - \sqrt{2}x$，

$\because AD \perp DC$， $DH \perp AC$，

$\therefore \dfrac{AH}{DH} = \dfrac{DH}{CH}$，

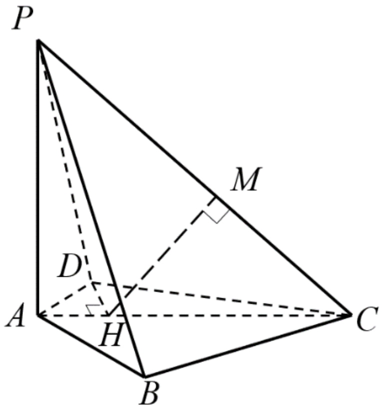
则 $DH^2 = 2\sqrt{2}x - 2x^2$， $DM^2 = DH^2 + HM^2 = 2\sqrt{2}x - x^2$，

则有 $\sin^2\langle A-CP-D\rangle = \dfrac{DH^2}{DM^2} = \dfrac{2\sqrt{2}x - 2x^2}{2\sqrt{2}x - x^2} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$，

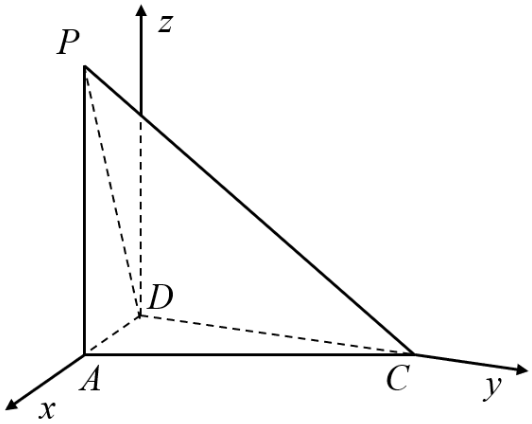
$2\sqrt{2}x = 8x^2$， 显然 $x \neq 0$， 则 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

则 $DH^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$， $AH = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{3}$.



方法 2：以 D 为坐标原点，以 DA，DC 及垂直于该平面的直线为 x,y,z 建立如图所示空间直角坐标系：



设 $AD=a$， $DC=b$，有 $a^2+b^2=4$

则 $D(0,0,0),A(a,0,0),P(a,0,2),C(0,b,0)$

$\overrightarrow{AC}=(-a,b,0)$， $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$

易求平面 ACP 的法向量为 $\vec{n}=(b,a,0)$

$\overrightarrow{DC}=(0,b,0)$， $\overrightarrow{DP}=(a,0,2)$

易求平面 DCP 法向量为 $\vec{m}=(-2,0,a)$

则 $\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+4}}=\dfrac{2b}{2\cdot\sqrt{a^2+4}}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

由于 $a>0$，解得 $a=\sqrt{3}$

则 $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{3}$.

18. 已知函数 $f(x) = \ln\dfrac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

（1）若 $b=0$，且 $f^{'}(x) \geq 0$，求 a 的最小值

（2）证明：曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形

（3）若 $f(x) > -2$，当且仅当 $1 < x < 2$，求 b 的取值范围.

解：（1）

$b=0$ 时 $f(x) = \ln\dfrac{x}{2-x} + ax = \ln x - \ln(2-x) + ax$， $0 < x < 2$

则 $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2-x} + a = \dfrac{2}{x(2-x)} + a \geq 0$，

即 $a \geq -\dfrac{2}{x(2-x)} = \dfrac{2}{(x-1)^2 - 1} = g(x)$ 恒成立，

又 $0 < x < 2$ 时 $(x-1)^2 - 1 < 0$， $\therefore g_{\max}(x) = g(1) = -2$，

$\therefore a \geq -2$，则 a 的最小值为 -2.

（2）证明：

$\because f(2-x) = \ln\dfrac{2-x}{x} + a(2-x) + b(1-x)^3$

$= -\ln\dfrac{x}{2-x} - a(x-2) - b(x-1)^3$

$= -\left[\ln\dfrac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3\right] + 2a$

$= -f(x) + 2a$

$\therefore f(x) + f(2-x) = 2a$

$\therefore f(x)$ 的图象为中心对称图形，对称中心为 $(1,a)$.

（3）$\because x \in (1,2)$ 时， $f(x) > -2$，

$\because f(x)$ 是连续的，

$\therefore f(1)\geq -2$，又 $f(1)=a$，

解得 $a\geq -2$，

$\because f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$， $f(1)=a\geq -2$，

端点恒成立：

①$x\in(1,2)$ 时 $f(x)>-2$ 恒成立的必要条件为，在 $x=1$ 处， $f(x)\geq -2$ 成立

$\Rightarrow f(1)\geq -2$，又 $f(1)=a\geq -2$ 恒成立，

$\Rightarrow f'(1)\geq 0$，

$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a+3b(x-1)^2$，注意到 $f'(1)=2+a\geq 0$ 恒成立，

$\Rightarrow f''(1)\geq 0$，

$\because f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}+6b(x-1)$，注意到 $f''(1)=0$ 恒成立，

$\Rightarrow f'''(1)\geq 0$，

$\because f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{(x-2)^3}+6b$

$\therefore f'''(1)=\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{(1-2)^3}+6b=4+6b\geq 0$，

解得：$b\geq -\dfrac{2}{3}$，

$\therefore b\geq -\dfrac{2}{3}$ 为 $x\in(1,2)$ 时 $f(x)>-2$ 恒成立的必要条件.

②下面证明 $b\geq -\dfrac{2}{3}$ 的充分性：

思路 1：

$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a+3b(x-1)^2>\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}-2-2(x-1)^2$

$=\dfrac{2}{x(2-x)}-2-2(x-1)^2$

$=\dfrac{2}{-(x-1)^2+1}-2-2(x-1)^2$，令 $t=(x-1)^2\in(0,1)$，

$=\frac{2}{1-t}-2-2t=2\left[\frac{1}{1-t}-(1+t)\right]$

$=2\frac{1-(1-t^2)}{1-t}=\frac{2t^2}{1-t}>0$

思路 2：

$\because f'''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x-2)^3}+6b=2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x-2)^3}\right]+6b$，

令 $t=x-1\in(0,1)$，

则 $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x-2)^3}=\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{1}{(t-1)^3}=-2\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}$，

再令 $m=t^2-1\in(-1,0)$，

则 $-2\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}=-2\frac{3m+4}{m^3}=-2\left(\frac{3}{m^2}+\frac{4}{m^3}\right)=-2h(m)$，

$\because h'(m)=-\frac{6}{m^3}-\frac{12}{m^4}=-\frac{6}{m^4}(m+2)$，

又 $\because m\in(-1,0)$，$\therefore h'(m)<0$

则 $h(m)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$h(m)<h(-1)=-1$，

则 $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x-2)^3}=-2\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}=-2h(m)>2$，又 $\because b\geq-\frac{2}{3}$，

$\therefore f'''(x)=2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x-2)^3}\right]+6b>4+6b\geq0$，

$\therefore f''(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

则 $f''(x)>f''(1)=0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

则 $f'(x)>f'(1)=2+a\geq0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

即 $x\in(1,2)$ 时，$f(x)>f(1)=a\geq -2$ 恒成立，

$\therefore b\geq -\frac{2}{3}$ 为 $x\in(1,2)$ 时 $f(x)>-2$ 恒成立的充分条件，

综上，$b\geq -\frac{2}{3}$ 为 $x\in(1,2)$ 时 $f(x)>-2$ 恒成立的充要条件，

则 b 的取值范围是 $b\geq -\frac{2}{3}$.

19. 设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j) 一一可分数列.

（1）写出所有的 $(i,j),1\leq i<j\leq 6$，使数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 (i,j) 一一可分数列

（2）当 $m\geq 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$ 一一可分数列

（3）从 $1,2,\cdots,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j(i<j)$，记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j) 一一可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\frac{1}{8}$

解：易知，$a_1,a_2,\quad,a_{4m+2}$ 是 (i,j) 可分的 $\Leftrightarrow 1,2,\quad,4m+2$ 是 (i,j) 可分的，

因此在后续讨论中，只关注数列的下角标.

（1）从 $1,2,3,4,5,6$ 中删去 (i,j) 剩下的四个数从小到大构成等差数列，记为 $\{b_k\},1\leq k\leq 4$.

设 $\{b_k\}$ 公差为 d，易知 $d=1$，

否则，若 $d\geq 2$，则 $b_4-b_1=3d\geq 6$，

又 $b_4-b_1\leq 6-1=5$，故矛盾，

$\therefore d=1$，则 $\{b_k\}$ 可以为 $\{1,2,3,4\}$、$\{2,3,4,5\}$、$\{3,4,5,6\}$，

则对应的 (i,j) 分别为 $(5,6)$、$(1,6)$、$(1,2)$.

（2）证明：只需考虑前 14 项在去掉 $(2,13)$ 后如何构成 3 组 4 项的等差数列，后

面剩下的$4m-12=4(m-3)$可自然依序划分为$m-3$组等差数列.

则只需构造$\{1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14\}$的一组划分，使划分出的 3 组数均成等差数列，取$\{1,4,7,10\}$，$\{3,6,9,12\}$，$\{5,8,11,14\}$，这三组数均为公差为 3 的等差数列，

对于剩下的$4(m-3)$个数，按每四个相邻数一组，划分为$m-3$组即可.

由此可见去掉$(2,13)$后，剩余的$4m$个数可以分为m组，每组均为等差数列，

故$m\geq 3$时，$1,2,\quad,4m+2$是$(2,13)$可分数列，

即$a_1,a_2,\quad,a_{4m+2}$是$(2,13)$可分数列.

（3）证明：用数学归纳法证明：共有不少于m^2+m+1种(i,j)的取法使$1,2,\quad,4m+2$为(i,j)可分数列，

①当$m=1$时，由（1）知，有$3=1^2+1+1$种(i,j)的取法，

②假设当$m=n$时，有至少n^2+n+1种(i,j)的取法，

则当$m=n+1$时，考虑数列$\{1,2,\ldots,4n+6\}$

下对于(i,j)分三种情况讨论：

1°当$i=1$时，

取$j=4k+2$，$(k=0,1,2,\ldots,n,n+1)$

则i,j之间（不含i,j）有$4k+2-1-1=4k$个连续的自然数，

可按形如$\{2,3,4,5\}$，$\{6,7,8,9\}$，$\ldots$，$\{4k-2,4k-1,4k,4k+1\}$划分，

剩下的$4k+3,4k+4,\ldots,4n+6$，也可按每四个连续自然数划分得到相应的等差数列，

$\because k=0,1,2,\ldots,n,n+1$，

$\therefore$这种情况有$n+2$种(i,j)的取法.

2° 当 $i=2$ 时

取 $j=4k+1$，$(k=2,\dots,n,n+1)$

现以 k 为公差构造划分为：

$\{1,k+1,2k+1,3k+1\}$

$\{3,k+3,2k+3,3k+3\}$

……

$\{k-1,2k-1,3k-1,4k-1\}$

$\{k,2k,3k,4k\}$

$\{k+2,2k+2,3k+2,4k+2\}$

（注意当 $k=2$ 时，只有 $\{1,3,5,7\}$，$\{4,6,8,10\}$ 这两组）

剩下的 $4k+3,4k+4,\dots,4n+6$，也可按每四个连续自然数划分得到相应的等差数列，

$\because k=2,\dots,n,n+1$，

$\therefore$ 这种情况有 n 种 (i,j) 的取法.

3° 当 $i>2$ 时

考虑 $\{5,6,7,\dots,4n+6\}$ 共 $4n+2$ 个数，

由归纳假设里 $m=n$ 时，有至少 n^2+n+1 种 (i,j) 的取法，

综合 1° 2° 3°，

当 $m=n+1$ 时，至少有 $(n+2)+n+(n^2+n+1)=(n+1)^2+(n+1)+1$ 种取法，

由①②及数学归纳法原理，知共有不少于 m^2+m+1 种 (i,j) 的取法使 $1,2,\quad,4m+2$ 为 (i,j) 可分数列，

那么 $P_m \geq \dfrac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\dfrac{m^2+m+1}{(4m+1)(2m+1)}=\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+8m+1}=\dfrac{1}{8}$，

$$\therefore P_m > \frac{1}{8}$$