

2023 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

理科数学

一、选择题

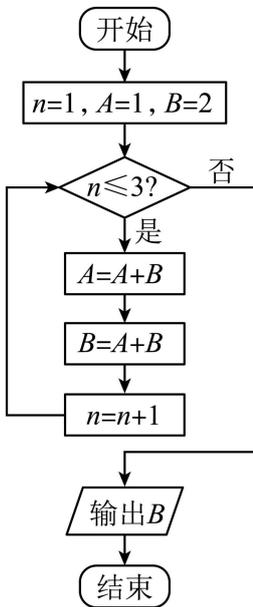
1. 设集合 $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$, U 为整数集, $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$ D. \emptyset

2. 若复数 $(a + i)(1 - ai) = 2, a \in \mathbb{R}$, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 执行下面的程序框图, 输出的 $B =$ ()



- A. 21 B. 34 C. 55 D. 89

4. 向量 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = -1, |\vec{c}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\cos\langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle =$ ()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, S_n$ 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $S_5 = 5S_3 - 4$, 则 $S_4 =$ ()

- A. 7 B. 9 C. 15 D. 30

6. 有 60 人报名足球俱乐部, 60 人报名乒乓球俱乐部, 70 人报名足球或乒乓球俱乐部, 若已知某人报足球俱乐部, 则其报乒乓球俱乐部的概率为 ()

- A. 0.8 B. 0.4 C. 0.2 D. 0.1

7. “ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ”的 ()

- A. 充分条件但不是必要条件
B. 必要条件但不是充分条件
C. 充要条件
D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A ,

B 两点, 则 $|AB| =$ ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 有五名志愿者参加社区服务, 共服务星期六、星期天两天, 每天从中任选两人参加服务, 则恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为 ()

- A. 120 B. 60 C. 40 D. 30

10. 已知 $f(x)$ 为函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数, 则 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个

数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $AB = 4, PC = PD = 3, \angle PCA = 45^\circ$, 则 $\triangle PBC$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$, F_1, F_2 为两个焦点, O 为原点, P 为椭圆上一点, $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{5}$, 则 $|PO| =$

()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题

13. 若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} -2x + 3y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$, 设 $z = 3x + 2y$, 则 z 的最大值为 _____.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 CD, A_1B_1 的中点, 则以 EF 为直径的球面与正方体每条

棱的交点总数为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = \sqrt{6}$, D 为 BC 上一点, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 则 $AD =$ _____.

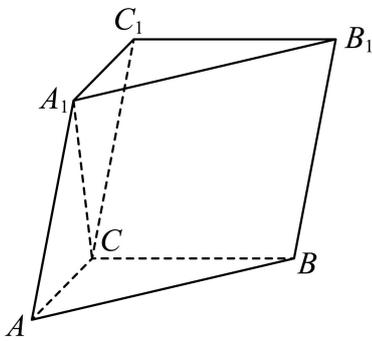
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $2S_n = na_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 2$, $A_1C \perp$ 底面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



(1) 求证: $AC = A_1C$;

(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2, 求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

19. 为探究某药物对小鼠的生长抑制作用, 将 40 只小鼠均分为两组, 分别为对照组 (不加药物) 和实验组 (加药物).

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 测得 40 只小鼠体重如下 (单位: g): (已按从小到大排好)

对照组: 17.3 18.4 20.1 20.4 21.5 23.2 24.6 24.8 25.0 25.4

26.1 26.3 26.4 26.5 26.8 27.0 27.4 27.5 27.6 28.3

实验组: 5.4 6.6 6.8 6.9 7.8 8.2 9.4 10.0 10.4 11.2

14.4 17.3 19.2 20.2 23.6 23.8 24.5 25.1 25.2 26.0

(i) 求 40 只小鼠体重的中位数 m , 并完成下面 2×2 列联表:

	$< m$	$\geq m$
对照组		

实验组		
-----	--	--

(ii) 根据 2×2 列联表, 能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

参考数据:

k_0	0.10	0.05	0.010
$P(k^2 \geq k_0)$	2.706	3.841	6.635

20. 已知直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 4\sqrt{15}$.

(1) 求 p ;

(2) 设 C 的焦点为 F , M, N 为 C 上两点, $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$, 求 $\triangle MNF$ 面积的最小值.

21. 已知 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) 若 $a = 8$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) < \sin 2x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

四、选做题

22. 已知 $P(2,1)$, 直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), α 为 l 的倾斜角, l 与 x 轴, y 轴正半轴交于 A, B 两

点, $|PA| \cdot |PB| = 4$.

(1) 求 α 的值;

(2) 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 l 的极坐标方程.

23. 已知 $f(x) = 2|x - a| - a, a > 0$.

(1) 求不等式 $f(x) < x$ 的解集;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2, 求 a .

2023 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

理科数学

一、选择题

【1 题答案】

【答案】A

【2 题答案】

【答案】C

【3 题答案】

【答案】B

【4 题答案】

【答案】D

【5 题答案】

【答案】C

【6 题答案】

【答案】A

【7 题答案】

【答案】B

【8 题答案】

【答案】D

【9 题答案】

【答案】B

【10 题答案】

【答案】C

【11 题答案】

【答案】C

【12 题答案】

【答案】B

二、填空题

【13 题答案】

【答案】2

【14 题答案】

【答案】15

【15 题答案】

【答案】12

【16 题答案】

【答案】2

三、解答题

【17 题答案】

【答案】(1) $a_n = n - 1$

$$(2) T_n = 2 - (2+n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

【18 题答案】

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{13}}{13}$$

【19 题答案】

【答案】(1) 分布列见解析, $E(X) = 1$

(2) (i) $m = 23.4$; 列联表见解析, (ii) 能

【20 题答案】

【答案】(1) $p = 2$

$$(2) 12 - 8\sqrt{2}$$

【21 题答案】

【答案】(1) 答案见解析.

(2) $(-\infty, 3]$

四、选做题

【22 题答案】

$$\text{【答案】(1) } \frac{3\pi}{4}$$

$$(2) \rho \cos \alpha + \rho \sin \alpha - 3 = 0$$

【23 题答案】

【答案】 (1) $\left(\frac{a}{3}, 3a\right)$

(2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$