

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：**1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$ ，则 $M \cap N =$
- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} =$
- A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$ ， $\mathbf{b} = (1, -1)$ 。若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$ ，则
- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$
4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是
- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ ， $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1 ， e_2 。若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ ，则 $a =$
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
6. 过 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α ，则 $\sin \alpha =$
- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$

- A. $\frac{7}{9}$
- B. $\frac{1}{9}$
- C. $-\frac{1}{9}$
- D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 选对但不全得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$,

其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车, 混合动力汽车, 电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则

- A. $p_1 \geq p_2$
- B. $p_2 \geq 10p_3$
- C. $p_3 = 100p_0$
- D. $p_1 \leq 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则

- A. $f(0) = 0$
- B. $f(1) = 0$
- C. $f(x)$ 是偶函数
- D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中，能被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有
- A. 直径为 0.99 m 的球体
- B. 所有棱长均为 1.4 m 的四面体
- C. 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体
- D. 底面直径为 1.2 m，高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有_____种（用数字作答）。
14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $A_1B_1=1$ ， $AA_1=\sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为_____。
15. 已知函数 $f(x)=\cos \omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ ，有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是_____。
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上， $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_2B}$ ， $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ ，则 C 的离心率为_____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中， $A+B=3C$ ， $2\sin(A-C)=\sin B$ 。

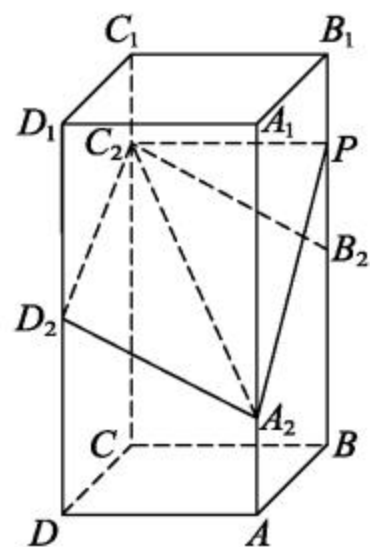
- (1) 求 $\sin A$ ；
- (2) 设 $AB=5$ ，求 AB 边上的高。

18. (12 分)

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AA_1=4$ 。

点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上， $AA_2=1$ ， $BB_2=DD_2=2$ ， $CC_2=3$ 。

- (1) 证明： $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ ；
- (2) 点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P 。



19. (12分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. (12分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的

前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

21. (12分)

甲乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8, 由抽签决定第一次投篮的人选, 第一次投篮的人是甲, 乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$,

则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

22. (12分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学参考答案与解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

【解析】 $N \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, 所以 $M \cap N = \{2\}$, 故选 C.

2. 已知复数 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} =$

- A. $-i$ B. i C. 0 D. 1

【解析】 $z = \frac{1-i}{2+2i} = -\frac{1}{2}i$, 所以 $z - \bar{z} = -i$, 故选 A.

3. 已知向量 $a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$. 若 $(a + \lambda b) \perp (b + \mu b)$, 则

- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

【解析】 $(a + \lambda b) \perp (b + \mu b) = a^2 + (\lambda + \mu)(a \cdot b) = 2(1 + \lambda\mu)$, 所以 $\lambda + \mu = -1$, 故选 D.

4. 设函数 $f(x) = 2^{a(x-1)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, -2]$ D. $[2, +\infty)$

【解析】易得, $\frac{a}{2} \geq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$, 故选 D.

5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$,

则 $a =$

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

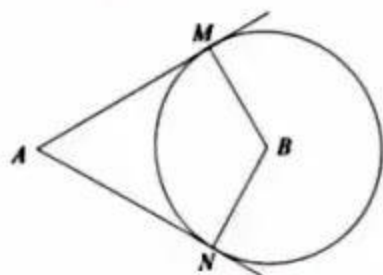
【解析】易得, $e_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故选 A.

6. 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha =$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】(方法一) 易得, $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 故圆心 $B(2, -2)$,

记 $A(0, -2)$, 设切点为 M, N , $AB = 2\sqrt{2}$, $BM = \sqrt{5}$ 故 $AM = \sqrt{3}$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle MBA = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \text{故选 B.}$$

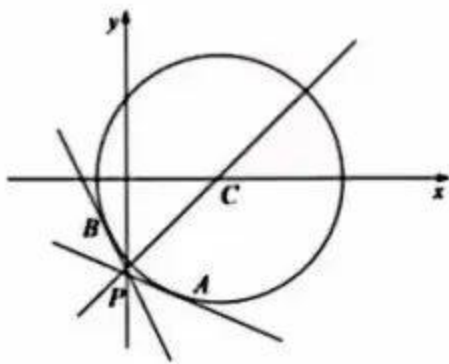
(方法二) 因为 $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 设圆心 $C(2,0)$,

$r = \sqrt{5}$, 设点 $P(0, -2)$, 则 $|PC| = 2\sqrt{2}$, 设过点 P 的

两条公切线 PA , PB . 则 $\angle APB = \alpha$, 则

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \text{故选 B.}$$



7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【解析】(方法一) a_n 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$, 故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件;

反之, $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$ 为常数, 设为 t , 即

$\frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = t$, 故 $S_n = na_{n+1} - t \cdot n(n+1)$, 故 $S_n = (n-1)a_n - t \cdot n(n-1)$, $n \geq 2$, 两式相减有:

$a_n = na_{n+1} - a_n(n-1) - 2tn \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2t$, 对 $n=1$ 也成立, 故 $\{a_n\}$ 为等差数列则甲是乙的必要条件, 故甲是乙的充要条件, 故选 C.

(方法二) 因为甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 , 公差为 d . 即 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

则 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, 故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 即甲是乙的充分条件. 反之, 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$

为等差数列, $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = D$, $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)D$. 即

$\frac{S_n}{n} = nS_1 + n(n-1)D$, $S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)D$, 当 $n \geq 2$ 时, 上两式相减得:

$S_n - S_{n-1} = S_1 + 2(n-1)d$, 当 $n=1$ 时, 上式成立. 所以 $a_n = a_1 + 2(n-1)d$, 又

$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nd - [a_1 + 2(n-1)d] = 2d$ 为常数. 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故选 C.

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$ 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

【解析】因为 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$ 故

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{即}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \text{故选 B.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 ，其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数
 B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
 C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
 D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

【解析】因为 $\frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2(x_1 + x_6)}{12} \neq 0$ ，所以

A 错误：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，所以 x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数的位置与 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的中位数的位置相同，所以 B 正确：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，距离数据 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的平均值大，即波动性大，所以标准差大，所以 C 错误：设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的最小值 x_2 ，最大值 x_5 ，则 $x_1 \leq x_2, x_5 \leq x_6$ ，所以 $x_6 - x_1 \geq x_5 - x_2$ ，所以 D 正确，故选 BD。

10. 噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱，定义声压级

$$L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}, \quad \text{其中常数 } p_0 (p_0 > 0) \text{ 是听觉下限阈值, } p \text{ 是实际声压, 下表为不同}$$

声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3

则

- A. $p_1 \geq p_2$ B. $p_2 > 10p_3$ C. $p_3 = 100p_0$ D. $p_1 \leq 100p_2$

【解析】因为 $L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$ ，所以 $\frac{p_1}{p_2} \geq 1$ ，所以 $p_2 \geq p_1$ ，所以

A 正确； $L_2 - L_3 = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} > 10$ ， $\lg \frac{p_2}{p_3} > \frac{1}{2}$ ， $\frac{p_2}{p_3} > e^{\frac{1}{2}}$ ，所以 B 错误；因为 $L_1 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} = 40$ ，

$\frac{p_1}{p_0} = 100$ ，所以 C 正确； $L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 90 - 50 = 40$ ， $\lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2$ ， $\frac{p_1}{p_2} \leq 100$ ，所以 D 正

确，故选 ACD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，则

- A. $f(0) = 0$ B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数 D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【解析】选项 A，令 $x = y = 0$ ，则 $f(0) = 0 \times f(0) + 0 \times f(0)$ ，则 $f(0) = 0$ ，故 A 正确；

选项 B，令 $x = y = 1$ ，则 $f(1) = 1 \times f(1) + 1 \times f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，故 B 正确；

选项 C，令 $x = y = -1$ ，则 $f(1) = (-1)^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times f(-1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，再令 $y = -1$ ，则

$f(-x) = (-1)^2 \times f(x) + x^2 f(-1)$ ，即 $f(-x) = f(x)$ ，故 C 正确；

选项 D，对式子两边同时除以 $x^2 y^2 \neq 0$ ，得到 $\frac{f(xy)}{x^2 y^2} = \frac{f(y)}{y^2} + \frac{f(x)}{x^2}$ ，故可以 $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| (x \neq 0)$

故可以得到 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，故 D 选项不正确；故选 ABC.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚忽略不计）内的有

- A. 直径为 0.99m 的球体
B. 所有棱长均为 1.4m 的四面体
C. 底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体
D. 底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

【解析】选项 A，球直径为 $0.99 < 1$ ，故球体可以放入正方体容器内，故 A 正确；选项 B，

选择连接正方体的面对角线，可以得到一个正四面体，其棱长为 $\sqrt{2} > 1.4$ ，故 B 正确；选项

C，底面直径 0.01m，可以忽略不计，但高为 $1.8 > \sqrt{3}$ ， $\sqrt{3}$ 为正方体的体对角线的长，故 C

不正确；选项 D，底面直径为 $1.2 < \sqrt{3}$ ，高为 0.01m 的圆柱体，其高度可以忽略不计，故 D

正确。故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案有_____种（用数字作答）.

【解析】当从这 8 门课中选修 2 门课时，共有 $C_4^1 \cdot C_4^1 = 16$ ；当从这 8 门课中选修 3 门课时，共有 $C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_4^1 = 48$ ；综上，共有 64 种。故填：64。

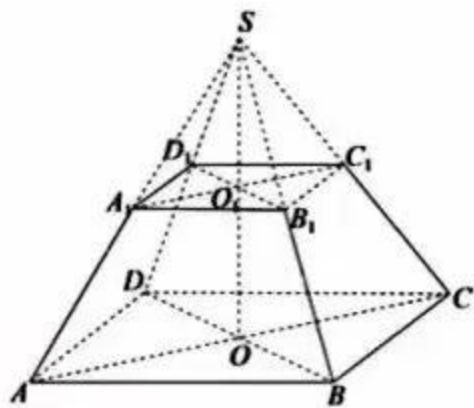
14. 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $A_1B_1=1$ ， $AA_1=\sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为_____。

【解析】如图，将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成正四

棱锥，则 $AO=\sqrt{2}$ ， $SA=2\sqrt{2}$ ， $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h, \quad V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h,$$

$$V = \frac{1}{3}(2^2 + 1^2 + \sqrt{2^2 \cdot 1^2}) \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \text{ 故填: } \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$



15. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1 (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是_____。

【解析】令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$ ，得 $\cos \omega x = 1$ ，又 $x \in [0, 2\pi]$ ，则 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$ ，所以 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$ ，即 $2 \leq \omega < 3$ ，故填：[2, 3)。

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上， $\overline{F_1 A} \perp \overline{F_1 B}$ ， $\overline{F_2 A} = -\frac{2}{3}\overline{F_2 B}$ ，则 C 的离心率为_____。

【解析】由 $\overline{F_2 A} = -\frac{2}{3}\overline{F_2 B}$ ，得 $\frac{|\overline{F_2 A}|}{|\overline{F_2 B}|} = \frac{2}{3}$ ，设 $\overline{F_2 A} = -2x$ ， $\overline{F_2 B} = 3x$ 由对称性可得 $|\overline{F_1 B}| = 3x$ ，

由定义可得， $|\overline{F_1 A}| = 2x + 2a$ ， $|\overline{AB}| = 5x$ ，设 $\angle F_1 A F_2 = \theta$ ，则

$$\sin \theta = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} = \frac{2x + 2a}{5x}, \text{ 解得 } x = a, \text{ 所以 } |\overline{AF_1}| = 2x + 2a, |\overline{AF_2}| = 2a, \text{ 在 } \triangle AF_1 F_2$$

中，则余弦定理可得 $\cos \theta = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{4}{5}$ 即 $5c^2 = 9a^2$ 可得 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，故填： $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中， $A + B = 3C$ ， $2\sin(A - C) = \sin B$ 。

(1) 求 $\sin A$ ；

(2) 设 $AB=5$ ，求 AB 边上的高。

【解析】(1) 因为 $A + B = 3C$ ，所以 $A + B = 3(\pi - A - B)$ ，所以 $A + B = \frac{4\pi}{3}$ ，所以 $C = \frac{\pi}{4}$ ，由题意得， $2\sin(A - C) = \sin B$ ，即 $2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ ，所以 $\sin A \cos C = 3\cos A \sin C$ ，所以 $\tan A = 3 \tan C = 3$ ，所以 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

(2) 由正弦定理得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{5 \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{5}$, 因为 $\sin A > \sin C$,

即 $A > C$, 由 (1) 得 $\sin A = 3\cos A$, 则 A 是锐角, $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

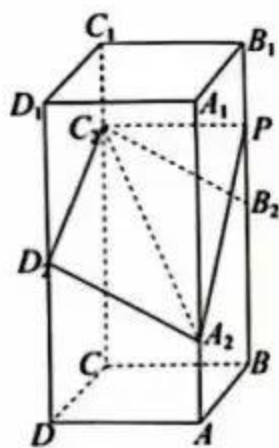
$\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 由正弦

定理, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $b = \frac{c \sin C}{\sin B} = \frac{5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{10}$. 故求 AB 边上的高为

$$b \sin A = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6.$$

18. (12分)

如图, 在正四棱锥 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=4$, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2=1$, $BB_2=DD_2=2$, $CC_2=3$.



(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求

B_2P .

(1)

方法一: 证明: 如图, 连接 A_2B_2 , 在直角梯形 $C_1D_1D_2C_2$ 中, 易计算 $C_2D_2 = \sqrt{2}$, 同理得

$C_2B_2 = \sqrt{2}$, $A_2B_2 = \sqrt{2}$, $A_2D_2 = \sqrt{2}$, 所以 $C_2B_2A_2D_2$ 为平行四边形, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

方法二: 证明: 易得, $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = A_2D_2 = \sqrt{5}$,

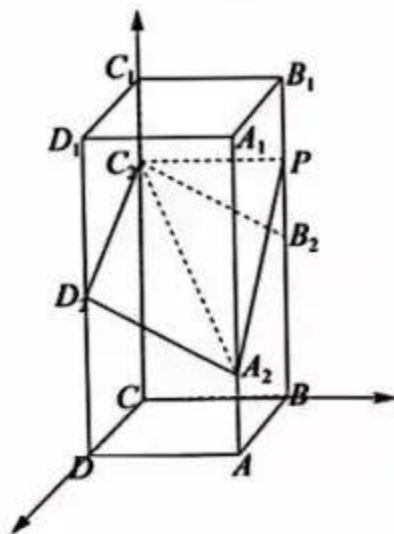
所以四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是菱形, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

方法三: 证明:

$$\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{DD_2} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow B_2C_2 \parallel A_2D_2$$

【解析】(2) 如图, 以 C 为原点, 分别以 CD, CB, CC 为 x, y, z 轴建系, 则 $A_2 = (2, 2, 1)$, $C_2 = (0, 0, 3)$, $D_2 = (2, 0, 2)$,

$P = (0, 2, t)$ 则 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2)$, $\overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$,



$\overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, t-1)$, 设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 分别为平面 $A_2C_2D_2$, A_2C_2P 的法

向量, 则 $\begin{cases} 2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0 \\ -2y_1 + z_1 \end{cases}$, 则 $\vec{n}_1 = (1, 1, 2)$, 同理 $\vec{n}_2 = (t-1, 3-t, 2)$, 则

$$\left| \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + 4}} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow t^2 - 4t = 0, \text{ 则 } t=1 \text{ 或 } t=3, \text{ 则 } B_2P = |2-t| = 1.$$

19. (12分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

【解析】(1) 由题知定义域为 \mathbf{R} , 且 $f'(x) = ae^x - 1$

$a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

$a > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $x > -\ln a$, 则 $x < \ln a$;

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增,

综上: 当 $a \leq 0$ 时, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增.

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, 要证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 即证: $a(e^x + a) - x > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

只需证: $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) + \frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) + \frac{1}{2}a^2 > 0$,

又因为 $e^x \geq x + 1$, 故 $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) \geq 0$ 又 $\ln a \leq x - 1$, 故 $\frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) \geq 0$, 且

$\frac{1}{2}a^2 > 0$, 故 $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) + \frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) + \frac{1}{2}a^2 > 0$ 显然成立, 所以

$f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. (12分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$, 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$

的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, $S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

【解析】(1) 因为 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 故 $3d = a_3 = a_1 + 2d$, 即 $a_1 = d$, 故 $a_n = nd$, 所以

$$b_n = \frac{n^2 + n}{nd} = \frac{n+1}{d}, S_n = \frac{n(n+1)d}{2}, T_n = \frac{n(n+3)}{2d}, \text{ 又 } S_3 + T_3 = 21, \text{ 即 } \frac{3 \cdot 4d}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2d} = 21,$$

即 $2d^2 - 7d + 3 = 0$, 故 $d = 3$ 或 $d = \frac{1}{2}$ (舍), 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = 3n$;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 则 $2b_2 = b_1 + b_3$, 即 $2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{a_1 + d} = \frac{1 \cdot 2}{a_1} + \frac{3 \cdot 4}{a_1 + 2d}$, 即

$$a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0, \text{ 所以 } a_1 = d \text{ 或 } a_1 = 2d, \text{ 当 } a_1 = d \text{ 时, } a_n = nd, \text{ 故 } S_n = \frac{n(n+1)d}{2},$$

$$T_n = \frac{n(n+3)}{2d}, \text{ 又 } S_{99} - T_{99} = 99, \text{ 即 } \frac{99 \cdot 100d}{2} - \frac{99 \cdot 102}{2d} = 99, \text{ 即}$$

$$50d^2 - d - 51 = 0, \text{ 所以 } d = \frac{1}{5} \text{ 或 } d = 1 \text{ (舍)};$$

即 $a_1 = 2d$ 时, $a_n = (n+1)d$, $b_n = \frac{n}{d}$, 故 $S_n = \frac{n(n+3)d}{2}$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2d}$, 又 $S_{99} - T_{99} = 99$,

$$\text{即 } \frac{99 \cdot 102d}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2d} = 99, \text{ 即 } 50d^2 - d - 50 = 0, \text{ 所以 } d = -\frac{51}{50} \text{ (舍) 或 } d = 1 \text{ (舍)};$$

综上: $d = \frac{51}{50}$.

21. (12分)

甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = q_i$;

$i = 1, 2, \dots, n$, 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = E(\sum_{i=1}^n q_i)$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

【解析】(1) 第二次是乙的概率为 $0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.8 = 0.6$;

(2) 第 i 次是乙投球的概率为 $1 - p_i$, 则 $p_{i+1} = 0.6p_i + 0.2(1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2$,

构造等比数列 $p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$,

$$\text{则 } p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}(p_i + \lambda), \text{ 又 } p_1 = \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, p_i = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3},$$

$$(3) \text{ 当 } n \in \mathbb{N}^+ \text{ 时, } E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$$

当 $n = 0$ 时, $E(Y) = 0$, 符合上式, 故 $E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$.

22. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于其到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 若矩形 $ABCD$ 上有三个点在 W 上, 证明: $ABCD$ 的周长 $> 3\sqrt{3}$.

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 则 $|y| = \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2}$, 化简得 $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

或者利用抛物线的定义可知, 点 P 在以 $F(0, \frac{1}{2})$ 为焦点, x 轴为准线的抛物线上, 其中 $p = \frac{1}{2}$

从而 $x^2 = 2p(y - \frac{1}{4})$, 故 W 的轨迹方程为 $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

不妨设 A, B, D 三点在 W 上, 且有 $BA \perp DA$.

设 $A(a, a^2 + \frac{1}{4})$, 设 BA, DA 的斜率分别 $k, -\frac{1}{k}$, 由对称性不妨设 $k \leq 1$.

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4} \\ y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 可得 } x^2 - kx + ka - a^2 = 0$$

由韦达定理得 $x_A + x_B = k$, 所以 $B = [k - a \cdot (k - a)^2 + \frac{1}{4}]$. $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |k - 2a|$,

同理可得, $|AD| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |-\frac{1}{k} - 2a| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |\frac{1}{k} + 2a|$,

所以

$$|AB| + |CD| = \sqrt{1 + k^2} |k - 2a| + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |\frac{1}{k} + 2a| \geq \sqrt{1 + k^2} (|k - 2a| + |\frac{1}{k} + 2a|) \geq \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{k + \frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{(1 + k^2)^3}{k^2}}$$

设 $f(m) = \frac{(1 + m)^3}{m} = m^2 + 3m + \frac{1}{m} + 3$, 可得 $f'(m) = 2m + 3 - \frac{1}{m^2} = \frac{(2m - 1)(m + 1)^2}{m^2}$,

可知 $f(m)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递减, $(\frac{1}{2}, 0)$ 单调递增, 所以 $f(m)$ 在 $(0, 1)$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$.

所以 $|AB| + |AD| = f(k^2) \geq \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 收于两处取等的条件不一致,

所以矩形的周长为 $2(|AB| + |AD|) > 3\sqrt{3}$.