

# 2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

## 数学

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 4\}$ , 则  $\complement_U(B \cup A) =$  ( )

- A.  $\{1, 3, 5\}$                       B.  $\{1, 3\}$                       C.  $\{1, 2, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 4, 5\}$

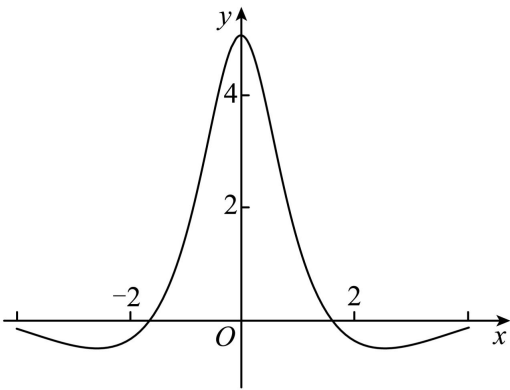
2. “ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分又不必要条件

3. 若  $a = 1.01^{0.5}$ ,  $b = 1.01^{0.6}$ ,  $c = 0.6^{0.5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $c > a > b$                       B.  $c > b > a$   
C.  $a > b > c$                       D.  $b > a > c$

4. 函数  $f(x)$  的图象如下图所示, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )



- A.  $\frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$                       B.  $\frac{5 \sin x}{x^2 + 1}$   
C.  $\frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$                       D.  $\frac{5 \cos x}{x^2 + 1}$

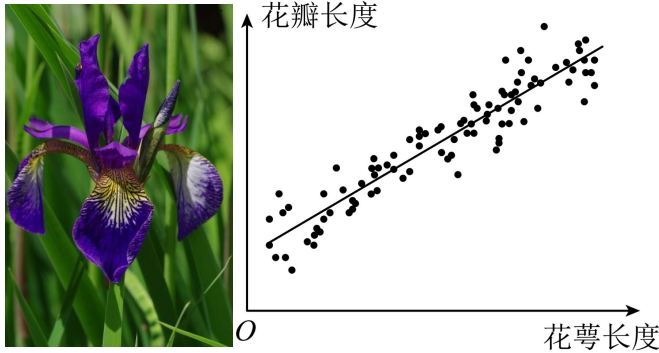
5. 已知函数  $f(x)$  的一条对称轴为直线  $x = 2$ , 一个周期为 4, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )

- A.  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$                       B.  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$   
C.  $\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$                       D.  $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

6. 已知  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $a_{n+1} = 2S_n + 2$ , 则  $a_4$  的值为 ( )

- A. 3                                      B. 18                                      C. 54                                      D. 152

7. 调查某种群花萼长度和花瓣长度, 所得数据如图所示, 其中相关系数  $r = 0.8245$ , 下列说法正确的是 ( )



- A. 花瓣长度和花萼长度没有相关性  
 B. 花瓣长度和花萼长度呈现负相关  
 C. 花瓣长度和花萼长度呈现正相关  
 D. 若从样本中抽取一部分, 则这部分的相关系数一定是 0.8245

8. 在三棱锥  $P-ABC$  中, 线段  $PC$  上的点  $M$  满足  $PM = \frac{1}{3}PC$ , 线段  $PB$  上的点  $N$  满足  $PN = \frac{2}{3}PB$ , 则

三棱锥  $P-AMN$  和三棱锥  $P-ABC$  的体积之比为 ( )

- A.  $\frac{1}{9}$                                       B.  $\frac{2}{9}$                                       C.  $\frac{1}{3}$                                       D.  $\frac{4}{9}$

9. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 过  $F_2$  作其中一条渐近线的垂线, 垂足为  $P$ . 已知

$PF_2 = 2$ , 直线  $PF_1$  的斜率为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$                                       B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$   
 C.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$                                       D.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10. 已知  $i$  是虚数单位, 化简  $\frac{5+14i}{2+3i}$  的结果为 \_\_\_\_\_.

11. 在  $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_.

12. 过原点的一条直线与圆  $C:(x+2)^2 + y^2 = 3$  相切, 交曲线  $y^2 = 2px (p > 0)$  于点  $P$ , 若  $|OP| = 8$ , 则  $P$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球, 其总数之比为  $5:4:6$ . 这三个盒子中黑球占总数的比例分别为  $40\%, 25\%, 50\%$ . 现从三个盒子中各取一个球, 取到的三个球都是黑球的概率为\_\_\_\_\_; 将三个盒子混合后任取一个球, 是白球的概率为\_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $BC = 1$ , 点  $D$  为  $AB$  的中点, 点  $E$  为  $CD$  的中点, 若设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , 则  $\overrightarrow{AE}$  可用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示为\_\_\_\_\_; 若  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

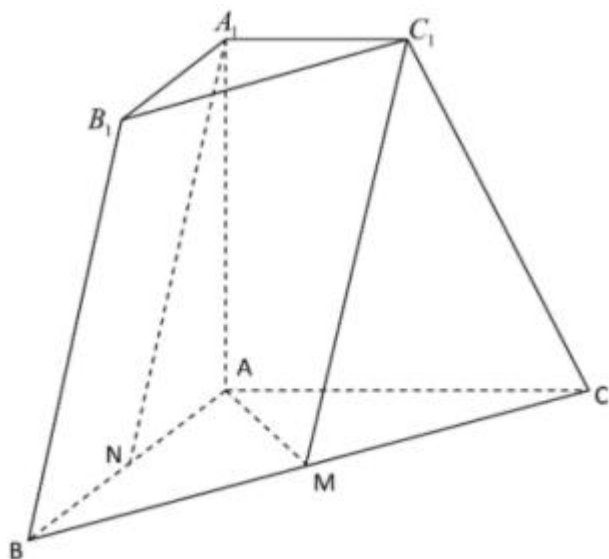
15. 若函数  $f(x) = ax^2 - 2x - |x^2 - ax + 1|$  有且仅有两个零点, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.**

16. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ . 已知  $a = \sqrt{39}, b = 2, \angle A = 120^\circ$ .

- (1) 求  $\sin B$  的值;
- (2) 求  $c$  的值;
- (3) 求  $\sin(B - C)$ .

17. 三棱台  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 若  $A_1A \perp$  面  $ABC, AB \perp AC, AB = AC = AA_1 = 2, A_1C_1 = 1$ ,  $M, N$  分别是  $BC, BA$  中点.



- (1) 求证:  $A_1N \parallel$  平面  $C_1MA$ ;

(2) 求平面  $C_1MA$  与平面  $ACC_1A_1$  所成夹角的余弦值;

(3) 求点  $C$  到平面  $C_1MA$  的距离.

18. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 右焦点为  $F$ , 已知  $|A_1F| = 3, |A_2F| = 1$ .

(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 已知点  $P$  是椭圆上一动点 (不与端点重合), 直线  $A_2P$  交  $y$  轴于点  $Q$ , 若三角形  $A_1PQ$  的面积是三角形  $A_2FP$  面积的二倍, 求直线  $A_2P$  的方程.

19. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_2 + a_5 = 16, a_5 - a_3 = 4$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式和  $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$ .

(2) 已知  $\{b_n\}$  为等比数列, 对于任意  $k \in \mathbb{N}^*$ , 若  $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$ , 则  $b_k < a_n < b_{k+1}$ ,

(I) 当  $k \geq 2$  时, 求证:  $2^k - 1 < b_k < 2^k + 1$ ;

(II) 求  $\{b_n\}$  的通项公式及其前  $n$  项和.

20. 已知函数  $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(x+1)$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 2$  处切线的斜率;

(2) 当  $x > 0$  时, 证明:  $f(x) > 1$ ;

(3) 证明:  $\frac{5}{6} < \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \leq 1$ .

# 2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

## 数学

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

【1 题答案】

【答案】A

【2 题答案】

【答案】B

【3 题答案】

【答案】D

【4 题答案】

【答案】D

【5 题答案】

【答案】B

【6 题答案】

【答案】C

【7 题答案】

【答案】C

【8 题答案】

【答案】B

【9 题答案】

【答案】D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分。

【10 题答案】

【答案】 $4+i$

【11 题答案】

【答案】60

【12 题答案】

【答案】6

【13 题答案】

【答案】 ①. 0.05    ②.  $\frac{3}{5}$ ##0.6

【14 题答案】

【答案】 ①.  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$     ②.  $\frac{13}{24}$

【15 题答案】

【答案】  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

【16 题答案】

【答案】 (1)  $\frac{\sqrt{13}}{13}$

(2) 5

(3)  $-\frac{7\sqrt{3}}{26}$

【17 题答案】

【答案】 (1) 证明见解析

(2)  $\frac{2}{3}$

(3)  $\frac{4}{3}$

【18 题答案】

【答案】 (1) 椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，离心率为  $e = \frac{1}{2}$ .

(2)  $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$ .

【19 题答案】

【答案】 (1)  $a_n = 2n+1$ ， $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i = 3 \times 2^{2n-1}$ ;

(2) (I) 证明见解析；(II)  $b_n = 2^n$ ，前  $n$  项和为  $2^{n+1} - 2$ .

【20 题答案】

【答案】 (1)  $\frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{4}$

(2) 证明见解析    (3) 证明见解析