

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内, $(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 设集合 $A = \{0, -a\}, B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$
A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样法做抽样调查, 拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有
A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ 种 B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ 种 C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ 种 D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种
4. 若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$
A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1
5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = x + m$ 与 C 交于 A, B 两点, 若 $\Delta F_1 AB$ 的面积是 $\Delta F_2 AB$ 的 2 倍, 则 $m =$
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
6. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增, 则 a 的最小值为
A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}
7. 已知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$
A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
8. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5, S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$

A. 120

B. 85

C. -85

D. -120

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知圆锥的顶点为 P ，底面圆心为 O ， AB 为底面直径， $\angle APB = 120^\circ$ ， $PA = 2$ ，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 45° ，则

A. 该圆锥的体积为 π

B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC = 2\sqrt{2}$

D. $\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

10. 设 O 为坐标原点，直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，且与 C 交于 M, N 两点， l 为 C 的准线，则

A. $p = 2$

B. $|MN| = \frac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切

D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

11. 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} (a \neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则

A. $bc > 0$

B. $ab > 0$

C. $b^2 + 8ac > 0$

D. $ac < 0$

12. 发出信号“0”：接收到信号“1”的概率为 α ，接收到信号“0”的概率为 $1-\alpha$ ；

发出信号“1”：接收到信号“0”的概率为 β ，接收到信号“1”的概率为 $1-\beta$ ；

有单发和三连发两种发出模式。单发是发出1次信号，翻译出的信号即为接收到的信号；三连发是连续3次发出相同信号，翻译出的信号为出现频数大的信号（如接收到的信号为1,0,1，则翻译出的信号为1）。

A. 三次单发信号1,0,1，接收到1,0,1的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 三连发信号1，接收到1,0,1的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

C. 三连发信号1，翻译出信号1的概率为

D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时，单发信号“0”且翻译出信号“0”的概率比三连发信号“0”且翻译出信号“0”的概率大

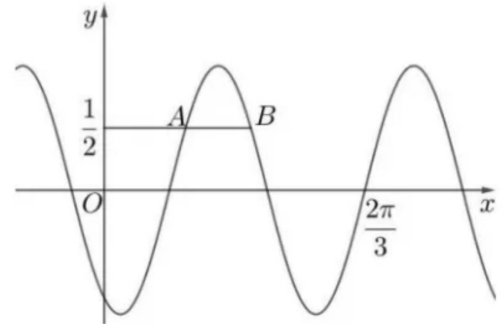
三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.

14. 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截, 截去一个底面边长为 2, 高为 3 的正四棱锥, 所得棱台的体积为 _____.

15. 已知直线 $x - my + 1 = 0$ 与 $\odot C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 写出满足 “ $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$ ” 的 m 的一个值 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 如图, A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(\pi) =$ _____.



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{3}$, D 为 BC 的中点, $AD = 1$,

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan B$;

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$, 求 b, c .

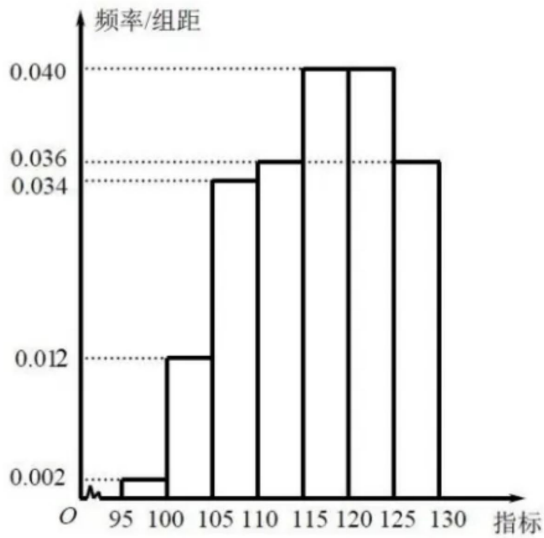
18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$

的前 n 项和, $S_4 = 32, T_3 = 16$.

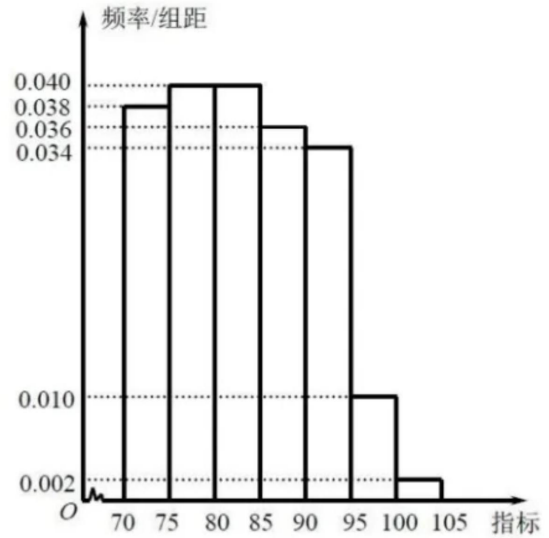
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

19. (12 分) 某研究小组进行某项研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异. 经过大量调查, 得到以下患病者和未患病者该指标的频率分布直方图.



患病



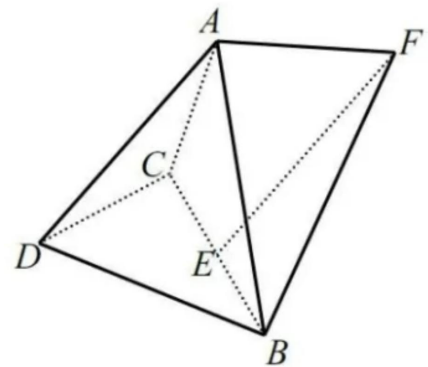
未患病

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c ，该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性，该检测标准的漏检率为患病者检测为阴性的概率，记为 $p(c)$ ，误诊率为未患病者检测为阳性的概率，记为 $q(c)$ 。假设数据在区间内均匀分布，时间发生的频率作为响应时间发生的概率。

- (1) 若漏检率为 $p(c) = 0.5\%$ ，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$ ；
- (2) 设函数 $f(c) = p(c) + q(c)$, $c \in [95, 105]$ ，求 $f(c)$ 的解析式，并求出 $f(c)$ 在 $[95, 105]$ 上的最小值。

20. (12分) 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $DA = DB = DC$ ，
 $BD \perp CD$ ， $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$ ， E 为 BC 的中点。

- (1) 证明： $BC \perp DA$ ；
- (2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$ ，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值。



21. (12分) 已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$ ，离心率为 $\sqrt{5}$ 。

- (1) 求 C 的方程；
- (2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点， M 在第二象限。直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P 。证明：点 P 在定直线上。

22. (12分) (1) 证明：当 $0 < x < 1$ 时， $x - x^2 < \sin x < x$ ；

- (2) 已知 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$ 。若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围。

注意事项:

1. 答题前, 务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其它答案标号.
3. 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上.
4. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效.
5. 考试结束后, 只将答题卡交回.

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内, $(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】 $(1+3i)(3-i)=6+8i$, 故对应的点在第一象限, 选 A.

2. 设集合 $A=\{0,-a\}$, $B=\{1,a-2,2a-2\}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $a=$

- A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

【答案】B

【解析】若 $a-2=0$, 则 $a=2$, 此时 $A=\{0,-2\}$, $B=\{1,0,2\}$, 不满足题意; 若 $2a-2=0$, 则 $a=1$, 此时 $A=\{0,-1\}$, $B=\{1,-1,0\}$, 满足题意. 故选 B.

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样法作抽样调查, 拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有

- A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$

【答案】D

【解析】根据按比例分配的分层抽样可知初中部抽 40 人, 高中部抽 20 人, 故选 D.

4. 若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a=$

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】发现 $g(x) = \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 是奇函数，而 $f(x) = (x+a)g(x)$ 为偶函数，有

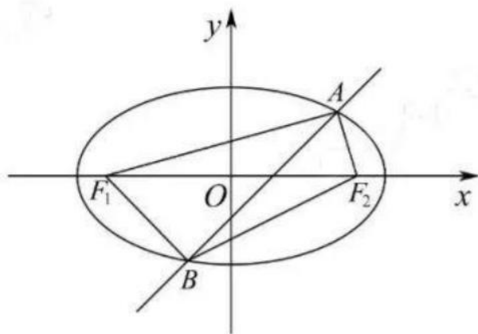
$f(-x) = (-x+a)g(-x) = -(-x+a)g(x) = (x+a)g(x) = f(x)$ ，故 $x-a = x+a$ ，则 $a=0$ ，选 B.

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 $y = x + m$ 与 C 交于 A, B 两点，

若 $\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 的面积的 2 倍，则 $m =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

【答案】C



【解析】由依题意可知 $S_{\triangle F_1AB} = 2S_{\triangle F_2AB}$ ，设椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 到直

线 $y = x + m$ 的距离分别为 d_1, d_2 ，且 $-2 < m < 0$ ，所以有 $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_2$ ，即

$d_1 = 2d_2$ ，将 $d_1 = \frac{|-\sqrt{2} + m|}{\sqrt{2}}$ ， $d_2 = \frac{|\sqrt{2} + m|}{\sqrt{2}}$ 代入上式解得 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，故选 C

6. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增，则 a 的最小值为

- A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

【答案】C

【解析】由题意可知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在区间 $(1, 2)$ 上恒成立，即 $a \geq \left(\frac{1}{xe^x}\right)_{\max}$ ，设 $g(x) = xe^x$ ，

则在 $x \in (1, 2)$ 上恒有 $g'(x) = (x+1)e^x > 0$ ，所以 $g(x)_{\min} = g(1) = e$ ，则 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$ ，即

$a \geq e^{-1}$ ，故选 C.

7. 已知 α 为锐角， $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【答案】D

【解析】由半角公式 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2}$ 解得， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，故选 D.

8. 记 S_n 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5, S_6 = 21S_2, S_8 =$

A. 120

B. 85

C. -85

D. -120

【答案】C

【解析】由等比数列的性质可得 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列, 因此 $(S_4 - S_2)^2 = S_2(S_6 - S_4)$,

将 $S_4 = -5, S_6 = 21S_2$ 代入上式解得 $S_2 = -1$ (舍) 或 $\frac{5}{4}$, 此时 $S_6 = \frac{105}{4}$, 由等比数列性质可知

$S_4 - S_2, S_6 - S_4, S_8 - S_6$ 为等比数列, 解得 $S_8 = -85$, 故选 C.

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

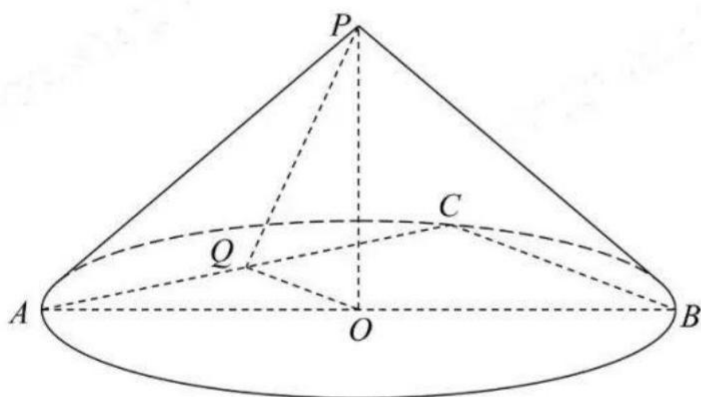
9. 已知圆锥的顶点为 P 底面圆心为 O, AB 为底面的直径, $\angle APB = 120^\circ, AP = 2$, 点 C 在底面圆周上, 且二面角 $P-AC-O = 45^\circ$, 则

A. 该圆锥的体积为 π

B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC = 2\sqrt{2}$

D. $\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$



【答案】AC

【解析】由 $\angle APB = 120^\circ, AP = 2$ 可知, 底面直径 $AB = 2\sqrt{3}$, 高 $PO = 1$, 故该圆锥的体积为 π , 所以 A 对; 该圆锥的侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 所以 B 错. 连接 CB , 取 AC 中点为 Q , 连接 QO, PQ , 易证二面角 $P-AC-O = 45^\circ$ 的平面角为 $\angle PQO = 45^\circ$, 所以 $QO = PO = 1, PQ = \sqrt{2}$, 所以 $BC = 2$, 所以 $AC = 2\sqrt{2}$, 故 C 对;

$S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} AC \cdot PQ = 2$, 故 D 错.

10. 设 O 为坐标原点, 直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且与 C 交于 M, N 两点, l 为 C 的准线, 则

A. $p=2$

B. $|MN| = \frac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切

D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

【答案】AC

【解析】直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$ 可知，抛物线的焦点的坐标为 $(1,0)$ ，所以 $p=2$ ，故 A 选项正确；由 $k_{MN} = -\sqrt{3}$ 可知直线 MN 的倾斜角为 120° ，所以

$$|MN| = \frac{2p}{\sin^2 120^\circ} = \frac{16}{3}$$

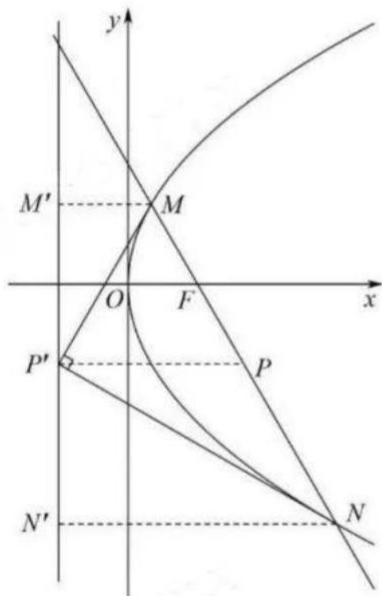
，故 B 选项错误. 过点 M 作准线 l 的垂线，交 l 于点 M' ，过点 N

作准线 l 的垂线，交 l 于点 N' ；并取 MN 的中点为点 P ，过点 P 作准线 l 的垂线，交 l 于点 P' ，连接 MP' 、 NP' ，由抛物线的定义知 $MF = MM'$ ， $NF = NN'$ ，所以

$$|MN| = |MM'| + |NN'|$$

，所以由梯形的中位线可知 $PP' = \frac{1}{2}(|MM'| + |NN'|) = \frac{1}{2}|MN|$ ，

所以 $PP' = MP = PN$ ，所以以 MN 为直径的圆与 l 相切，故 C 对，由图观察可知， $\triangle OMN$ 显然不是等腰三角形，故 D 错.



11. 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$) 既有极大值又有极小值则:

A. $bc > 0$

B. $ab > 0$

C. $b^2 + 8ac > 0$

D. $ac < 0$

【答案】BCD

【解析】由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{2x^3}$ ，由函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，则 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根，令

$$h(x) = ax^2 - bx - 2c$$

，则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根，所以 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$ ，即

$$\begin{cases} b^2 + 8ac > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \\ \frac{-2c}{a} > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} b^2 + 8ac > 0 \\ ab > 0 \\ ac < 0 \end{cases}, \text{ 所以 } b \text{ 与 } a \text{ 同号, } c \text{ 与 } a \text{ 异号, 故 } bc < 0, \text{ 所以 A}$$

错误, B 正确, C 正确, D 正确.

12. 在信道内传输 0, 1 信号, 信号的传输相互独立, 发送 0 时, 收到 1 的概率为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 收到 0 的概率为 $1 - \alpha$; 发送 1 时, 收到 0 的概率为 $\beta(0 < \beta < 1)$ 收到 1 的概率为 $1 - \beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次; 三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码(例如, 若依次收到 1, 0, 1, 则译码为 1).

A. 采用单次传输方案, 若依次发送 1, 0, 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$

B. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2$

C. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$

D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送 0, 则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

【答案】 ABD

【解析】

AB 选项由相互独立的积事件的概率乘法公式可知为对; C 选项三次传输译码为 1, 则可能是三次全部译为 1, 或者有两次译为 1, 则概率为 $C_3^2 \beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$, 故 C 选项错误,

针对 D 选项: 可以采用特值法或者作差法计算. 三次传输方式译为 0 的概率:

$C_3^2 \alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3$, 单次传输译为 0 的概率为: $1 - \alpha$, 而

$C_3^2 \alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)\alpha(1 - 2\alpha) > 0$, 所以 D 对.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 a, b 满足 $|a - b| = \sqrt{3}$, $|a + b| = |2a - b|$, 则 $|b| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 由 $|a + b| = |2a - b|$, 得 $a^2 = 2a \cdot b$; 由 $|a - b| = \sqrt{3}$, 得 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3$, 即 $b^2 = 3$, $|b| = \sqrt{3}$.

14. 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截, 截去一个底面边长为 2, 高为 3 的正四棱锥, 所得棱台的体积为_____.

【答案】28

【解析】方法一 由棱台性质可知，上下两个底面相似比为1:2，故截后棱台的体高为3，上底面为边长为2的正方形，下底面为边长为4的正方形，代入棱台体积公式得：

$$V = \frac{1}{3} \times 3 \times (2^2 + 4^2 + \sqrt{2^2 \times 4^2}) = 28.$$

方法二 由题意易求正四棱锥高为6，

$$V_{\text{棱台}} = V_{\text{大四棱锥}} - V_{\text{小四棱锥}} = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 6 - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 3 = 28.$$

15. 已知直线 $x - my + 1 = 0$ 与 $\odot C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点，写出满足“ $\triangle ABC$ 面积为

$\frac{8}{5}$ ”的 m 的一个值为_____.

【答案】 ± 2 或 $\pm \frac{1}{2}$ (任写一个)

【解析】方法一 由题可知 $\triangle ABC$ 为腰长为8的等腰三角形，设其顶角为 θ ，

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \theta$ ，解得 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，解 $\triangle ABC$ 可得： $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ ，圆心 C 到直线

$x - my + 1 = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，代入点线距公式可得： $m = \pm \frac{1}{2}$ (任填一个值即可).

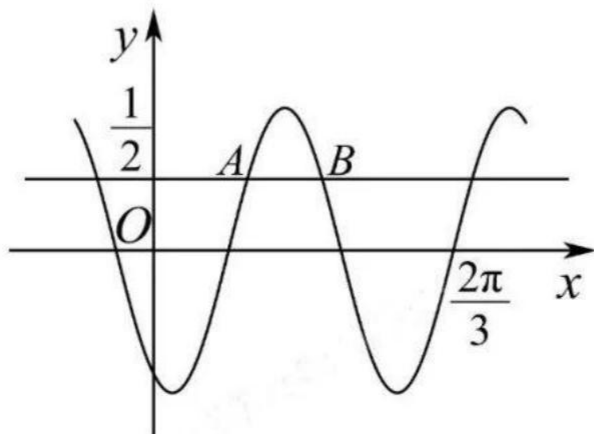
方法二 由 $x - my + 1 = 0$ 恒过定点 $(-1, 0)$ ，又 $C(1, 0)$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_B| = \frac{8}{5}$ ，所以

$|y_B| = \frac{8}{5}$ ，代入圆的方程得 $x_B = \frac{11}{5}$ 或 $x_B = -\frac{1}{5}$ ，所以 $B(\frac{11}{5}, \frac{8}{5})$ 或 $B(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5})$ 或 $B(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$

或 $B(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$ 代入直线方程得 $m = \pm 2$ 或 $m = \pm \frac{1}{2}$.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ，如图 A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点，

若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$ ，则 $f(\pi) =$ _____.



【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】设 $A(x_1, \frac{1}{2})$, $B(x_2, \frac{1}{2})$, 则 $\omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}$, 又 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega = 4$,

由曲线 $y = f(x)$ 过 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, 所以 $4 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2\pi$, 即 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin(4x - \frac{2\pi}{3})$,

$$f(\pi) = \sin(4\pi - \frac{2\pi}{3}) = \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 点 D 为 BC 的中点, 且 $AD=1$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan B$;

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$, 求 b 和 c .

【答案】(1) $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$; (2) $b=c=2$.

【解析】(1) 方法一: 正弦定理+余弦定理

由题意可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = 2\sqrt{3}$, 故 $ac \sin B = 2\sqrt{3} \dots\dots \textcircled{1}$,

又在 $\triangle ABD$ 中, 有 $\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 由 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ 得,

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{c}{\sin \frac{2\pi}{3}}, \text{ 故 } c \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots \textcircled{2}; \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 式得 } a = 4.$$

在 $\triangle ADB$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = c^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos \frac{2\pi}{3}$,

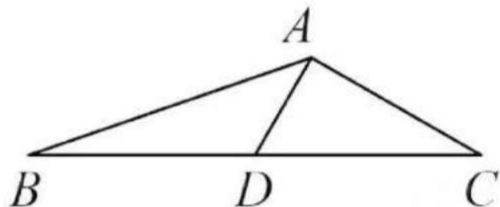
$$\text{有 } c^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 5 + 2 = 7, \text{ 得 } c = \sqrt{7}.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \cos B = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{7 + 4 - 1}{2\sqrt{7} \times 2} = \frac{5}{2\sqrt{7}} > 0,$$

$$\text{故 } B \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 有 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

方法二: 余弦定理

$$\text{因 } AD \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的中线, 故 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a = \sqrt{3},$$



故 $a=4$ ，在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理知 $b^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$ ，

进一步在 $\triangle ABD$ 中， $c^2 = AB^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ = 7$ ，

在 $\triangle ABC$ 中有， $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{7 + 16 - 3}{2\sqrt{7} \times 4} = \frac{5}{2\sqrt{7}} > 0$ ，

故 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，有 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ ， $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 。

(2) 在 $\triangle ABC$ ，由中线长公式可得 $b^2 + c^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ，

得 $AD^2 + BD^2 = 4$ ，知 $BD = \sqrt{3}$ ，得 $a = 2\sqrt{3}$ 。

由 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 和 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$ 得， $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \tan A$ ，

代入有 $\tan A = -\sqrt{3} < 0$ ，得 $A \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，有 $A = \frac{2\pi}{3}$ 。

又 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ，有 $bc = 4$ 。

由 $b^2 + c^2 = 8$ 和 $bc = 4$ ，得 $b = c = 2$ 。

方法三

(1) 因为 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a = \sqrt{3}$

所以： $a=4$ ，在 $\triangle ADC$ 中由余弦定理得： $b^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$

在 $\triangle ABD$ 中 $c^2 = AB^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ = 7$

在 $\triangle ABC$ 中

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{7 + 16 - 3}{2\sqrt{7} \times 4} = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \quad \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

因此： $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中 由中线长公式得： $(2AD)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ ，即

$2^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) = 16$ ，因而 $a^2 = 12$

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$ ，因而 $bc \sin A = 2\sqrt{3}$

又由余弦定理得： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，即 $12 = 8 - 2bc \cos A$ ，因而 $bc \cos A = -2$

因而有 $\tan A = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2}$ ，所以 $bc = 4$ ，又 $b^2 + c^2 + 2bc = 8 + 8 = 16 = (b+c)^2$

$b^2 + c^2 - 2bc = 8 - 8 = 0 = (b-c)^2$ 故可得 $b = c = 2$

18. (12分) $\{a_n\}$ 为等差数列， $b_n = \begin{cases} a_n - 6(n\text{奇}), \\ 2a_n(n\text{偶}), \end{cases}$ 记 S_n ， T_n 为 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和，

$$S_4 = 32, T_3 = 16.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

【答案】(1) $a_n = 2n + 3$; (2) 见解析.

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{由 } S_4 = 32 \text{ 得 } 4a_1 + 6d = 32$$

$$\text{又 } b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 3d - 6$$

$$\text{所以 } T_3 = 4a_1 + 4d - 12 = 16, \text{ 即 } a_1 + d = 7$$

$$\text{由 } \begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ a_1 + d = 7 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2 \end{cases} \text{ 所以 } a_n = 2n + 3.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = \begin{cases} 2n - 3, n \text{ 为奇数,} \\ 4n + 6, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{当 } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } T_n = k(-1) + \frac{k(k-1)}{2} \times 4 + 14k + \frac{k(k-1)}{2} \times 8 = 5k^2 + 7k$$

$$S_n = 2k \times 5 + \frac{2k(2k-1)}{2} \times 2 = 4k^2 + 8$$

$$T_n - S_n = k^2 - k = k(k-1)$$

当 $n > 5$ 即 $k > 2$ 时, $k(k-1) > 0$, 所以 $T_n > S_n$;

$$\text{当 } n = 2k - 1 \ (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } T_n = (k+1)(-1) + \frac{(k+1)k}{2} \times 4 + 14k + \frac{k(k-1)}{2} \times 8$$

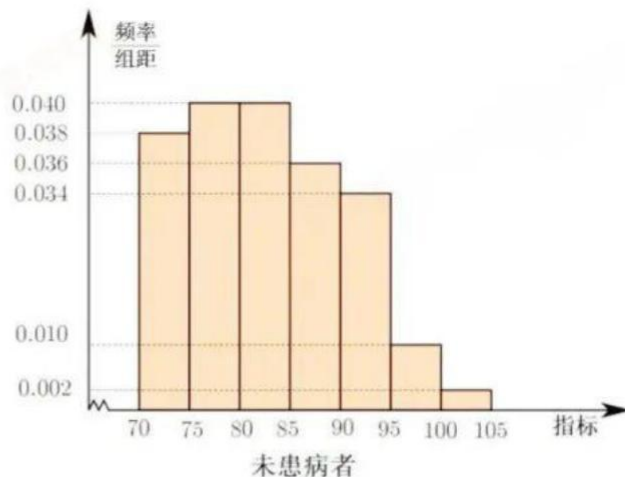
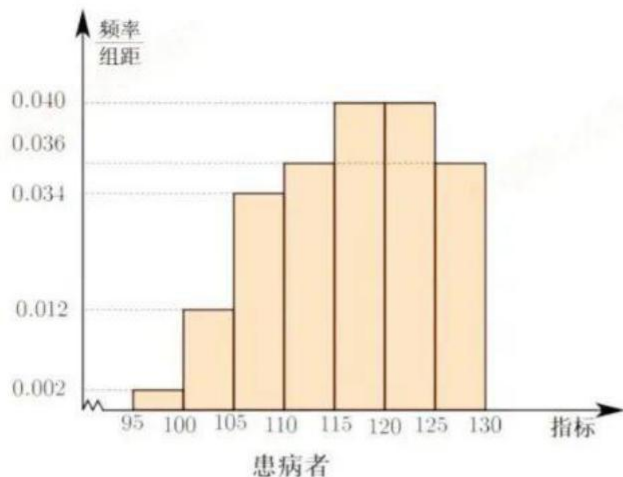
$$= 6k^2 + 11k - 1$$

$$S_n = (2k+1) \times 5 + \frac{(2k+1)2k}{2} \times 2 = 4k^2 + 12k + 5$$

$$T_n - S_n = 2k^2 - k - 6 = (2k+3)(k-2)$$

当 $n > 5$ 即 $k > 2$ 时, $(2k+3)(k-2) > 0$, 所以 $T_n > S_n$. 证毕.

19. (12分) 某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异, 经过大量调查, 得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图:



利用该指标制定一个检测标准, 需要确定临界值 c , 将该指标大于 c 的人判定为阳性, 小于或等于 c 的人判定为阴性, 此检测标准的漏诊率是将患病者判为阴性的概率, 记为 $p(c)$; 误诊率是将未患病者判定为阳性的概率, 记为 $q(c)$. 假设数据在组内平均分布, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1) 当 $p(c) = 0.5\%$ 时, 求临界值 c 和误诊率 $q(c)$;

(2) 设函数 $f(c) = p(c) + q(c)$, 当 $c \in [95, 105]$ 时, 求 $f(c)$ 的解析式, 并求 $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 的最小值.

【答案】(1) $c = 97.5, q(c) = 3.5\%$;

(2) 0.012

【解析】

(1) 由题意当 $p(c) = 0.5\%$ 时, $c = 97.5$, 此时 $q(c) = \frac{0.01 \times 5}{2} + 0.002 \times 5 = 0.035 = 3.5\%$

(2) 当 $c \in [95, 100)$, $p(c) = \frac{c-95}{5} \times 0.002, q(c) = \frac{100-c}{5} \times 0.01 + 0.01$

当 $c \in [100, 105)$, $p(c) = 5 \times 0.002 + \frac{c-100}{5} \times 0.012, q(c) = \frac{105-c}{5} \times 0.002$

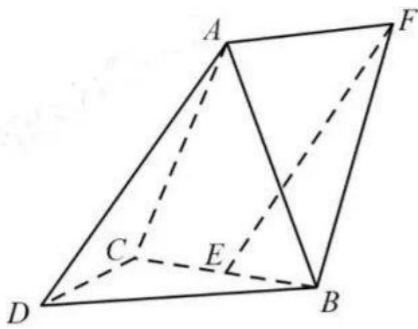
$$\therefore f(c) = \begin{cases} -0.0016c + 0.172, & c \in [95, 100) \\ 0.002c - 0.188, & c \in [100, 105] \end{cases}$$

所以, 当 $c = 100$ 时 $f(c)$ 取最小值, 最小值为 $f(100) = 0.012$.

20. (12分) 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $DA = DB = DC$, $BD \perp CD$,

$\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, 已知 E 为 BC 的中点.

(1) 证明: $BC \perp DA$; (2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$, 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



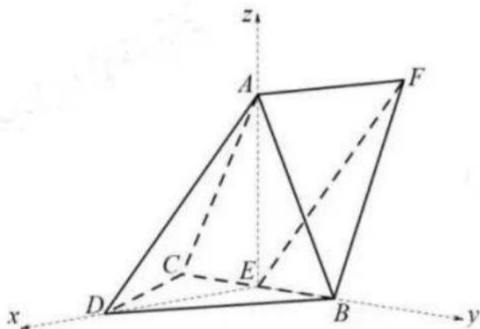
【答案】(1) 略; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】方法一

(1) 证明: 连接 AE 、 DE , 设 $DA = DB = DC = \sqrt{2}$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADB \cong \triangle ADC$,

因此 $AB = AC = \sqrt{2}$, 又因为 $BE = CE$, 所以 $AE \perp BC$, 同理 $DE \perp BC$, 又 $AE \cap DE = E$,

所以 $BC \perp$ 平面 ADE , 又 $AD \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp AD$.



(2) 解: 由 $DA = DB = DC = \sqrt{2}$, $\angle BDC = 90^\circ$,

由 (1) $DE \perp BC$, $AB = AC = \sqrt{2}$, 则 $DE = BE = CE = AE = 1$, 可得

$AE^2 + DE^2 = AD^2$, 因此 $AE \perp DE$, 由 (1) $AE \perp BC$, 又 $DE \cap BC = E$, 所以 $AE \perp$ 平面 BDC .

因此以 E 为原点, 分别以 ED 、 EB 、 EA 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则 $D(1,0,0)$, $A(0,0,1)$, $E(0,0,0)$, $B(0,1,0)$,

因为 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = (-1,0,1)$, $\overrightarrow{AE} = (0,0,-1)$, 所以 $\overrightarrow{DB} = (-1,1,0)$,

$\overrightarrow{AB} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{AF} = (-1,0,0)$,

设平面 ABD , 平面 ABF 的法向量分别是 $\vec{m} = (x,y,z)$, $\vec{n} = (a,b,c)$,

所以 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DB} = -x + y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = y - z = 0 \end{cases}$ 取 $x=1$, 则 $\vec{m} = (1, 1, 1)$, 同理 $\vec{n} = (0, 1, 1)$,

设平面 ABD 与平面 ABF 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二 (1)证明: 连接 AE 、 DE ,

$\because DB = DC, E$ 为 BC 的中点

$\therefore DE \perp BC$

$\because DB = DC, \angle ADB = \angle ADC = 60^\circ, DA$ 为公共边

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADC$

$\therefore AB = AC, \therefore AE \perp BC$, 又 $AE \cap DE = E, AE, DE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp$ 平面 ADE ,

故 $BC \perp AD$.

(2) 不妨设 $DA = DB = DC = 2$, 得 $AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}, DE = \sqrt{2}$, 在直角 $Rt\triangle AEB$ 中, 得 $AE = \sqrt{2}$, 所以 $AE^2 + DE^2 = AD^2$, 即 $AE \perp DE$. 又 $AE \perp BC, DE \cap BC = E, BC, DE \subset$ 平面 BCD , 所以 $AE \perp$ 平面 BCD .

如图以 E 为原点, 分别以 ED 、 EB 、 EA 为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $E(0, 0, 0), A(0, 0, \sqrt{2}), D(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{2}, 0)$, 又

$\vec{EF} = \vec{DA} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 得 $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$,

又 $\vec{AB} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \vec{DB} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{BF} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

设平面 DAB 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DB} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$, 令 $x=1$, 得 $\vec{n} = (1, 1, 1)$,

同理可得平面 ABF 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 1, 1)$,

设平面 DAB 与平面 ABF 的夹角为 θ , 则 $|\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. (12分) 双曲线 C 中心为坐标原点, 左焦点 $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$

(1) 求 C 的方程

(2) 记 C 得左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $B(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于 P , 证明: P 在定直线上.

方法一:

【解析】(1)由题意 $c = 2\sqrt{5}$, $e = \sqrt{5} = \frac{c}{a}$, 则 $a = 2$, $b^2 = 16$,

双曲线为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

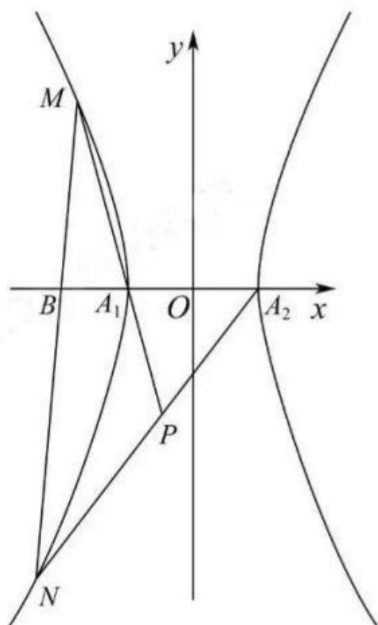
(2)设过点 B 的直线 $x = ty - 4$, 联立双曲线得 $(4t^2 - 1)y^2 - 32ty + 48 = 0$

则 $y_1 + y_2 = \frac{32t}{4t^2 - 1}$, $y_1 \cdot y_2 = \frac{48}{4t^2 - 1}$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-8}{4t^2 - 1}$,

设直线 MA_1 : $\frac{y - y_1}{y_1} = \frac{x - x_1}{x_1 + 2}$ 设直线 NA_2 : $\frac{y - y_2}{y_2} = \frac{x - x_2}{x_2 - 2}$,

联立得消去 y 得 $(\frac{x - x_1}{x_1 + 2} + 1)y_1 = (\frac{x - x_2}{x_2 - 2} + 1)y_2$,

代入韦达定理的 $x = -1$, 即 P 在直线 $x = -1$ 上



方法二:

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$,

(2) ①当 $l \perp y$ 轴时, 不符合题意.

②设直线 $l: x = ty - 4$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$.

联立方程组即 $\begin{cases} x = ty - 4 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$ 则 $(4t^2 - 1)y^2 - 32ty + 48 = 0$,

\therefore 直线与双曲线的左支有两个交点, 即 $\begin{cases} 4t^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ y_1 y_2 < 0 \end{cases}$, 则

$$y_1 + y_2 = \frac{32t}{4t^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{48}{4t^2 - 1}$$

$$\text{又} \because MA_1 \text{ 与 } NA_2 \text{ 相交于点 } P, \text{ 则 } \begin{cases} \frac{y_0}{x_0 + 2} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \\ \frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{y_2}{x_2 - 2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0 - 2}{x_0 + 2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} = \frac{y_1(ty_2 - 6)}{y_2(ty_1 - 2)}$$

$$= \frac{ty_1 y_2 - 6y_1}{ty_1 y_2 - 2y_2} = \frac{ty_1 y_2 - 6(y_1 + y_2) + 6y_2}{ty_1 y_2 - 2y_2} = -3. \text{ 即 } x_0 = -1;$$

所以点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

方法三

$$(1) \text{ 由题意 } c = 2\sqrt{5}, e = \sqrt{5} = \frac{c}{a}, \text{ 则 } a = 2, b^2 = 16$$

$$\text{双曲线为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(2) \text{ 设过点 } B \text{ 的直线 } y = k(x + 4), \text{ 联立双曲线得 } (4 - k^2)x^2 - 8k^2x - 16 - 16k^2 = 0$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4 - k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{-16(1 + k^2)}{4 - k^2},$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + \frac{5}{2}(x_1 + x_2) = -4, \text{ 即 } (x_1 + \frac{5}{2})(x_2 + \frac{5}{2}) = \frac{9}{4} \quad (*)$$

$$\text{设直线 } MA_1: \frac{y}{y_1} = \frac{x + 2}{x_1 + 2} \text{ 设直线 } NA_2: \frac{y}{y_2} = \frac{x - 2}{x_2 - 2},$$

$$\text{联立得消去 } y \text{ 得: } (\frac{x + 2}{x_1 + 2})(x_1 + 4) = (\frac{x - 2}{x_2 - 2})(x_2 + 4), \text{ 即 } \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{(x_1 + 2)(x_2 + 4)}{(x_1 + 4)(x_2 - 2)}$$

代入(*)式, 化简得

$$\frac{x + 2}{x - 2} = \frac{(x_1 + 2)(x_2 + 4)}{(x_1 + 4)(x_2 - 2)} = \frac{(\frac{9}{4x_2 + 10} - \frac{1}{2})(x_2 + 4)}{(\frac{9}{4x_2 + 10} + \frac{3}{2})(x_2 - 2)} = \frac{(-2x_2 + 4)(x_2 + 4)}{(6x_2 + 24)(x_2 - 2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{解 } \frac{x + 2}{x - 2} = -\frac{1}{3} \text{ 得 } x = -1, \text{ 即 } P \text{ 在定直线 } x = -1 \text{ 上.}$$

22. (12分) (1) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 略

$$(2) a < -\sqrt{2} \text{ 或 } a > \sqrt{2}$$

【解析】(1) 令 $h(x) = x - x^2 - \sin x$, $h(0) = 0$, $h'(x) = 1 - 2x - \cos x$, $h'(0) = 0$,

$h''(x) = -2 + \sin x < 0$, 所以 $h'(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < h'(0) = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < h(0) = 0$, 所以 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x$

令 $g(x) = x - \sin x$, $g(0) = 0$, $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $0 < x < 1$ 时, $\sin x < x$

$$(2) f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2),$$

$f(-x) = \cos(-ax) - \ln(1 - x^2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数。

$$f'(x) = -a \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}, \quad f'(0) = 0,$$

$$f'(-x) = -a \sin(-ax) + \frac{-2x}{1-x^2} = -f'(x), \text{ 所以 } f'(x) \text{ 为奇函数。}$$

$$f''(x) = -a^2 \cos ax + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}, \quad f''(0) = 2 - a^2,$$

$$f'''(x) = a^3 \sin ax + \frac{4(1-x^2) + 8x(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

当 $2 - a^2 > 0$, $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ 时, $f''(0) = 2 - a^2 > 0$,

令 $t = \min(1, \frac{1}{a})$, 当 $0 < x < t$ 时, $f'''(x) > 0$, $f''(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递增,

$$f''(x) > f''(0) > 0,$$

$f'(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递增, $f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递增, 与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾。

当 $2 - a^2 < 0$, $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$ 时, $f''(0) = 2 - a^2 < 0$,

$a > \sqrt{2}$ 时, 令 $t = \min(1, \frac{1}{a})$, 当 $0 < x < t$ 时, $f'''(x) > 0$, $f''(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递增,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-a^2 \cos ax + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \right) = +\infty,$$

所以 $\exists x_0 \in (0, t)$, 使得 $f''(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, 使得 $f''(x) < 0$,

$f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减,

因为 $f'(x)$ 为奇函数, 所以在 $(-x_0, 0)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-x_0, 0)$ 单调递增,

所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,

$f(x)$ 为偶函数, 所以同理 $a < -\sqrt{2}$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

当 $2 - a^2 = 0$, $a = -\sqrt{2}$ 或 $a = \sqrt{2}$ 时, $f''(0) = 2 - a^2 = 0$,

$a = \sqrt{2}$ 时, $f'(x) = -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + \frac{2x}{1-x^2}$, $x \in (0, 1)$ 时,

$$f'(x) > -2x + \frac{2x}{1-x^2} = 2x \left(\frac{1}{1-x^2} - 1 \right) > 0,$$

在 $(0, 1)$ $f(x)$ 单调递增, 与 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾。

$f(x)$ 为偶函数, 所以同理 $a = -\sqrt{2}$ 时, 与 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点也矛盾。

综上所述, a 的范围是 $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$