数学试题参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，共40分。

1. B　2. C　3. B　4. A　5. A　6. B　7. D　8. D　9. C　10. A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11. 10　12. 80，122　13. $-\frac{3}{5}$，$\frac{1}{3}$　14. 1

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　16. $\frac{1}{3}$，1　17. $\frac{28}{29}$

三、解答题：本大题共5小题，共74分。

18. 本题主要考查三角函数及其变换、正弦定理等基础知识，同时考查数学运算等素养。满分14分。

（Ⅰ）由正弦定理得 $2\sin B\ \sin A=\sqrt{3}\sin A$，

故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由题意得 $B=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由 $A+B+C=\pi$ 得 $C=\frac{2\pi}{3}-A$，

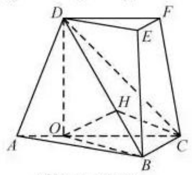
由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形得 $A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

由 $\cos C=\cos(\frac{2\pi}{3}-A)=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$ 得

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\sin(A+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\in(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}].$$

故 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}]$.

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查直观想象和数学运算等素养。满分15分。



（第19题图）

（Ⅰ）如图，过点 D 作 $DO\perp AC$，交直线 AC 于点 O，连结 OB.

由 $\angle ACD=45°$，$DO\perp AC$ 得 $CD=\sqrt{2}CO$，

由平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC 得 $DO\perp$ 平面 ABC，所以

$DO\perp BC$.

由 $\angle ACB=45°$，$BC=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}CO$ 得 $\quad BO\perp BC$．

所以 $BC\perp$ 平面 BDO，故 $\quad BC\perp DB$．

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $BC/\!/EF$，所以 $\quad EF\perp DB$．

（Ⅱ）方法一：

过点 O 作 $OH\perp BD$，交直线 BD 于点 H，连结 CH．

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $DF/\!/CO$，所以直线 DF 与平面 DBC 所成角等于直线 CO 与平面 DBC 所成角．

由 $BC\perp$ 平面 BDO 得 $OH\perp BC$，故 $OH\perp$ 平面 BCD，所以 $\angle OCH$ 为直线 CO 与平面 DBC 所成角．

设 $CD=2\sqrt{2}$．

由 $DO=OC=2$，$BO=BC=\sqrt{2}$，得 $BD=\sqrt{6}$，$OH=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以

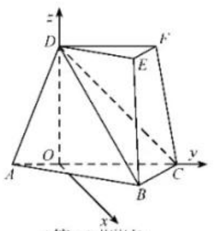
$$\sin\angle OCH=\frac{OH}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因此，直线 DF 与平面 DBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

方法二：

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $DF/\!/CO$，所以直线 DF 与平面 DBC 所成角等于直线 CO 与平面 DBC 所成角，记为 θ．

如图，以 O 为原点，分别以射线 OC，OD 为 y，z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．



（第19题图）

设 $CD=2\sqrt{2}$．

由题意知各点坐标如下：

$O(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,2)$．

因此

$\overrightarrow{OC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,-2,2)$．

设平面 BCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -2y+2z=0,\end{cases}$ 可取

$$\boldsymbol{n}=(1,1,1).$$

所以

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因此，直线 DF 与平面 DBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

20. 本题主要考查等差数列、等比数列等基础知识，同时考查数学运算和逻辑推理等素养。满分 15 分。

（Ⅰ）由 $b_1+b_2=6b_3$ 得 $\quad 1+q=6q^2$，

解得 $\quad q=\frac{1}{2}$．

由 $c_{n+1}=4c_n$ 得 $\quad c_n=4^{n-1}$．

由 $a_{n+1}-a_n=4^{n-1}$ 得 $\quad a_n=a_1+1+4+\cdots+4^{n-2}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$．

（Ⅱ）由 $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}c_n$ 得 $\quad c_n=\frac{b_1b_2c_1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1+d}{d}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$，

所以 $\quad c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1+d}{d}\left(1-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$，

由 $b_1=1$，$d>0$ 得 $b_{n+1}>0$，因此

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

21. **本题主要考查抛物线的几何性质，直线与椭圆、抛物线的位置关系等基础知识，同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养。满分15分。**

（Ⅰ）由 $p=\frac{1}{16}$ 得 C_2 的焦点坐标是 $(\frac{1}{32},0)$.

（Ⅱ）由题意可设直线 $l: x=my+t(m\neq 0,\ t\neq 0)$，点 $A(x_0,y_0)$.

将直线 l 的方程代入椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0,$$

所以点 M 的纵坐标

$$y_M=-\frac{mt}{m^2+2}.$$

将直线 l 的方程代入抛物线 $C_2: y^2=2px$ 得

$$y^2-2pmy-2pt=0,$$

所以 $y_0y_M=-2pt$，解得

$$y_0=\frac{2p(m^2+2)}{m},$$

因此

$$x_0=\frac{2p(m^2+2)^2}{m^2}.$$

由 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ 得

$$\frac{1}{p^2}=4\left(m+\frac{2}{m}\right)^2+2\left(m+\frac{2}{m}\right)^4\geqslant 160,$$

所以当 $m=\sqrt{2}$，$t=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 时，p 取到最大值 $\frac{\sqrt{10}}{40}$.

22. **本题主要考查函数的单调性、零点，导数的运算及其应用，同时考查数学抽象、逻辑推理与数学运算等素养。满分15分。**

（Ⅰ）因为 $f(0)=1-a<0$，$f(2)=e^2-2-a\geqslant e^2-4>0$，所以 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

因为 $f'(x)=e^x-1$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

（Ⅱ）（ⅰ）令 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\ (x\geqslant 0)$，$g'(x)=e^x-x-1=f(x)+a-1$，由（Ⅰ）知函数 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，故 $g(x)\geqslant g(0)=0$.

由 $g(\sqrt{2(a-1)})\geqslant 0$ 得 $f(\sqrt{2(a-1)})=e^{\sqrt{2(a-1)}}-\sqrt{2(a-1)}-a\geqslant 0=f(x_0)$，

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，故 $\sqrt{2(a-1)}\geqslant x_0$.

令 $h(x)=e^x-x^2-x-1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，$h'(x)=e^x-2x-1$，

令 $h_1(x)=e^x-2x-1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，$h_1'(x)=e^x-2$，所以

x	0	$(0,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,1)$	1
$h_1'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$e-2$
$h_1(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$e-3$

故当 $0<x<1$ 时，$h_1(x)<0$，即 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，因此当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$h(x)\leqslant h(0)=0$.

由 $h(\sqrt{a-1})\leqslant 0$ 得 $f(\sqrt{a-1})=e^{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-1}-a\leqslant 0=f(x_0)$，

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，故 $\sqrt{a-1}\leqslant x_0$.

综上，$\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant \sqrt{2(a-1)}$.

（ⅱ）令 $u(x)=e^x-(e-1)x-1$，$u'(x)=e^x-(e-1)$，所以当 $x>1$ 时，$u'(x)>0$，故函数 $u(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，因此 $u(x)\geqslant u(1)=0$.

由 $e^{x_0}=x_0+a$ 可得

$$x_0f(e^{x_0})=x_0f(x_0+a)=(e^a-1)x_0^2+a(e^a-2)x_0\geqslant(e-1)ax_0^2,$$

由 $x_0\geqslant\sqrt{a-1}$ 得 $x_0f(e^{x_0})\geqslant(e-1)(a-1)a$.