2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至3页，第Ⅱ卷4至6页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分．

参考公式：

• 如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

• 如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$．

• 球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中 R 表示球的半径．

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

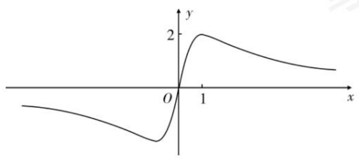
1．设全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,0,1,2\},B=\{-3,0,2,3\}$，则 $A\cap\left(\complement_U B\right)=$

A．$\{-3,3\}$　　B．$\{0,2\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{-3,-2,-1,1,3\}$

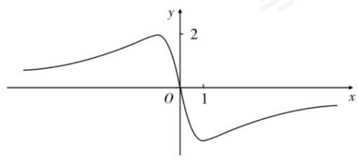
2．设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

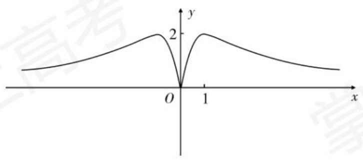
3．函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为



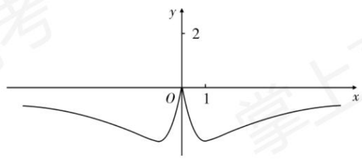
A



B



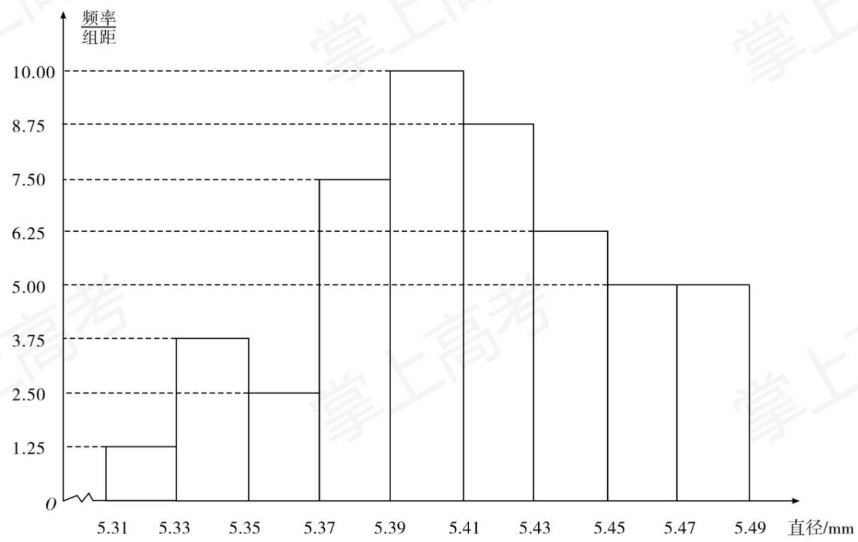
C



D

4．从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33),[5.33,5.35),\cdots,$

$[5.45,5.47),[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间$[5.43,5.47)$内的个数为



A．10　　B．18　　C．20　　D．36

5．若棱长为$2\sqrt{3}$的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为

A．12π　　　　B．24π　　　　C．36π　　　　D．144π

6．设$a=3^{0.7},b=(\frac{1}{3})^{-0.8},c=\log_{0.7}0.8$，则$a,b,c$的大小关系为

A．$a<b<c$　　　　B．$b<a<c$　　　　C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

7．设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过抛物线$y^2=4x$的焦点和点$(0,b)$的直线为$l$．若$C$的一条渐近线与$l$平行，另一条渐近线与$l$垂直，则双曲线$C$的方程为

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　　　B．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　　　C．$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　　　D．$x^2-y^2=1$

8．已知函数$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$．给出下列结论：

①$f(x)$的最小正周期为2π；

②$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的最大值；

③把函数$y=\sin x$的图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，可得到函数$y=f(x)$的图象．

其中所有正确结论的序号是

A．①　　　　B．①③　　　　C．②③　　　　D．①②③

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3,x\geq 0,\\ -x,x<0.\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|(k\in\mathbf{R})$恰有4个零点，则$k$的取值范围是

A．$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　　　B．$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,2\sqrt{2})$

C．$(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　　　D．$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共11小题，共105分．

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分．

10．i是虚数单位，复数$\frac{8-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$________．

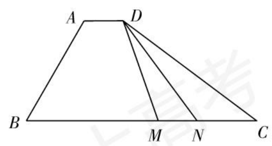
11．在$(x+\frac{2}{x^2})^5$的展开式中，x^2的系数是________.

12．已知直线$x-\sqrt{3}y+8=0$和圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A,B两点．若$|AB|=6$，则r的值为________.

13．已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$．假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为________；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为________.

14．已知$a>0,b>0$，且$ab=1$，则$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$的最小值为________.

15．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=60^\circ, AB=3$，$BC=6$，且$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}$，则实数$\lambda$的值为________，若$M,N$是线段$BC$上的动点，且$|\overrightarrow{MN}|=1$，则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$的最小值为________.



三．解答题：本大题共5小题，共75分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分14分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c．已知$a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$．

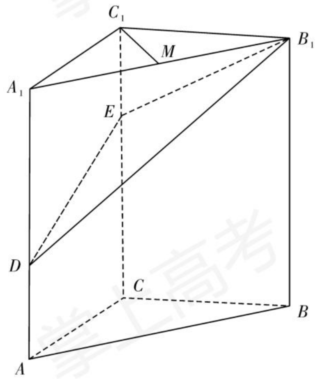
（Ⅰ）求角C的大小；

（Ⅱ）求$\sin A$的值；

（Ⅲ）求$\sin(2A+\frac{\pi}{4})$的值．

17．（本小题满分15分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面$ABC, AC\perp BC, AC=BC=2$，$CC_1=3$，点D，E分别在棱AA_1和棱CC_1上，且$AD=1, CE=2, M$为棱A_1B_1的中点．



（Ⅰ）求证：$C_1M \perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值；

（Ⅲ）求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

18.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-3)$，右焦点为 F，且 $|OA|=|OF|$，其中 O 为原点.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点 B 在椭圆上（B 异于椭圆的顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

19.（本小题满分 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1, a_5=5(a_4-a_3), b_5=4(b_4-b_3)$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

（Ⅲ）对任意的正整数 n，设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, n为奇数,\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, n为偶数.\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

20.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（Ⅰ）当 $k=6$ 时，

（i）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ii）求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\dfrac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $k\geq -3$ 时，求证：对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有

$$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$