

2020年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共5页，150分，考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0, 1\}$
- B. $\{0, 1\}$
- C. $\{-1, 1, 2\}$
- D. $\{1, 2\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1, 2)$, 则 $i \cdot z =$

- A. $1 + 2i$
- B. $-2 + i$
- C. $1 - 2i$
- D. $-2 - i$

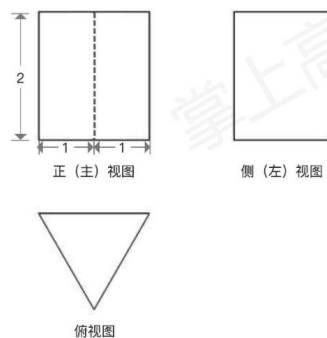
3. 在 $(\sqrt{x} - 2)^5$ 的展开式中， x^2 的系数为

- A. -5
- B. 5
- C. -10
- D. 10

4. 某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为

- A. $6 + \sqrt{3}$
- B. $6 + 2\sqrt{3}$

- C. $12+\sqrt{3}$
D. $12+2\sqrt{3}$



5. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$ ，则其圆心到原点的距离的最小值为

- (A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7

6. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ ，则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是

- (A) $(-1,1)$
(B) $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
(C) $(0,1)$
(D) $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

7. 设抛物线的顶点为 O ，焦点为 F ，准线为 l ， P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ \perp l$ 于 Q ，则线段 FQ 的垂直平分线

- (A) 经过点 O
(B) 经过点 P
(C) 平行于直线 OP
(D) 垂直于直线 OP

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -9$ ， $a_5 = -1$ ，记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n = 1, 2, \dots$)，则数列 $\{T_n\}$

- (A) 有最大项, 有最小项
(B) 有最大项, 无最小项
(C) 无最大项, 有最小项
(D) 无最大项, 无最小项

9. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 “存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$ ” 是 “ $\sin \alpha = \sin \beta$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

10. 2020年3月14日是全球首个国际圆周率日 (π Day). 历史上, 求圆周率 π 的方法有多种, 与中国传统数学中的“割圆术”相似, 数学家阿尔·卡西的方法是: 当正整数 n 充分大时, 计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形 (各边均与圆相切的正 $6n$ 边形) 的周长, 将它们的算术平均数作为 2π 的近似值, 按照阿尔·卡西的方法, π 的近似值的表达式是

- (A) $3n(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n})$
(B) $6n(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n})$
(C) $3n(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n})$
(D) $6n(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n})$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

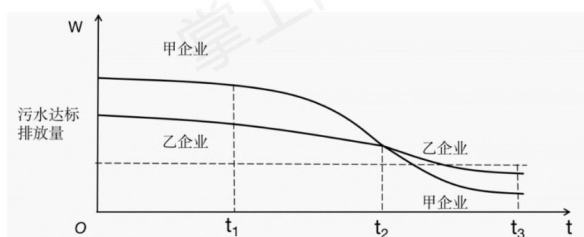
11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$ 的定义域是_____.

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$, 则 C 的右焦点的坐标为_____: C 的焦点到其渐近线的距离是_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $|\overrightarrow{PD}| =$ _____; $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____.

14. 若函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为_____.

15. 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改, 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W = f(t)$, 用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱. 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

- ① 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；
- ② 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；
- ③ 在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标；
- ④ 甲企业在 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 这三段时间中，在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强。

其中所有正确结论的序号是_____。

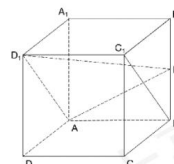
三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

综合题分割

16. (本小题13分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 BB_1 的中点，

- (I) 求证： $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E ；
- (II) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值。



综合题分割

17. (本小题13分)

在 $\triangle ABC$ 中， $a+b=11$ ，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

- (I) a 的值；
- (II) $\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积。

条件①： $c=7$ ， $\cos A = -\frac{1}{7}$ ；

条件②： $\cos A = \frac{1}{8}$ ， $\cos B = \frac{9}{16}$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

综合题分割

18. (本小题 14 分)

某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方

案二。为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立。

- (I) 分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率；
- (II) 从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；
- (III) 将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0 。假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1 ，试比较 p_0 与 p_1 的大小。(结论不要求证明)

综合题分割

19. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = 12 - x^2$ 。

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程；
- (II) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$ ，求 $S(t)$ 的最小值。

综合题分割

20. (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $A(-2, -1)$ ，且 $a = 2b$ 。

- (I) 求椭圆 C 的方程；
- (II) 过点 $B(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N ，直线 MA, NA 分别交直线

$x = -4$ 于点 P, Q . 求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

综合题分割

21. (本小题 15 分)

已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 给出两个性质:

① 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 $a_i, a_j (i > j)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m , 使得 $\frac{a_i^2}{a_j} = a_m$;

② 对于 $\{a_n\}$ 中任意一项 $a_n (n \geq 3)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 $a_k, a_l (k > l)$, 使得 $a_n = \frac{a_k^2}{a_l}$.

(I) 若 $a_n = n (n = 1, 2, \dots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①, 说明理由;

(II) 若 $a_n = 2^{n-1} (n = 1, 2, \dots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②, 说明理由;

(III) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且同时满足性质①和性质②, 证明: $\{a_n\}$ 为等比数列.