2015年高考数学（全国Ⅰ卷）理科解析

1.解析 由$\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$得$z=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}$，所以$|z|=1$．故选A.

2.解析 原式$=\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$．故选D.

3.解析 否命题是对原命题的条件与结论同时否定，因为存在的否定是任意，大于的否定是小于等于，所以$\neg p:\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$．故选C.

4.解析 根据独立重复试验公式得，该同学通过测试的概率为$P=\mathrm{C}_3^2\times0.6^2\times0.4+0.6^3=0.648$．故选A.

5. 解 析 由题可得$F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，且$\dfrac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，即$x_0^2=2+2y_0^2$，所以$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=\left(-\sqrt{3}-x_0,-y_0\right)\cdot\left(\sqrt{3}-x_0,-y_0\right)=x_0^2+y_0^2-3=3y_0^2-1<0$，解得$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<y_0<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．故选A.

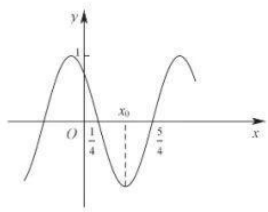
6.解析 设圆锥底面半径为r，则米堆底面弧度为$\dfrac{1}{4}\times2\times3r=8$，解得$r=\dfrac{16}{3}$，所以米堆的体积为$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times3\times\left(\dfrac{16}{3}\right)^2\times5=\dfrac{320}{9}$立方尺，故堆放的米约为$\dfrac{320}{9}\div1.62\approx22$斛.

故选B.

7. 解 析 由题可得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$．故选A.

8.解析 由题可得$\dfrac{T}{2}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4}=1$，即$T=2$，所以$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$．

由图可知$x_0=\dfrac{3}{4}$，所以$\dfrac{3}{4}\pi+\varphi=2k\pi+\pi$，解得$\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$．令$k=0$，解得$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以$f(x)=\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.



令$2k\pi\leqslant\pi x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\pi$，解得$2k-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant2k+\dfrac{3}{4}$.

故选D.

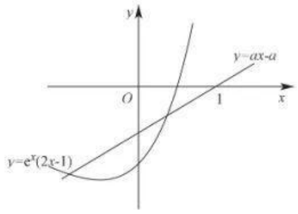
9. 解 析

$S=1,n=0,m=\frac{1}{2}\to S=\frac{1}{2},m=\frac{1}{4},n=1,\frac{1}{2}>0.01\to$ $S=\frac{1}{4},m=\frac{1}{8},n=2,\frac{1}{4}>0.01\to$ $S=\frac{1}{8},m=\frac{1}{16},n=3,\frac{1}{64}>0.01\to\cdots\to S=\frac{1}{128},m=\frac{1}{256},n=7,\frac{1}{128}<0.01\to$输出$n=7$．故选 C.

10.**解析**　$\left(x^2+x+y\right)^5=\left[\left(x^2+x\right)+y\right]^5$．展开式中含$y^2$的项为$C_5^2\left(x^2+x\right)^{5-2}y^2=C_5^2\left(x^2+x\right)^3y^2$，而$\left(x^2+x\right)^3$中含$x^5$的项为$C_3^1\left(x^2\right)^2x=C_3^1x^5$，所以$x^5y^2$的系数为$C_5^2\times C_3^1=30$．故选 C.

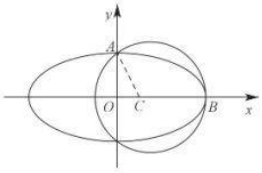
11.**解析**　由正视图和俯视图可知，该几何体是半球与半个圆柱的组合体，圆柱的半径与球的半径都为r，圆柱的高为$2r$，其表面积为$\frac{1}{2}\times4\pi r^2+\pi r^2+\pi r\times2r+2r\times2r=5\pi r^2+4r^2=16+20\pi$，解得$r=2$．故选 B.

12.**解析**　设$g(x)=e^x(2x-1)$，$h(x)=ax-a$，可转化成存在唯一的整数x_0，使得$g(x)<h(x)$．因为$g'(x)=e^x(2x+1)$，所以当$x<-\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$上单调递减；当$x>-\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增．因为当$x=0$时，$g(0)=-1$，$h(0)=0$，所以$g(0)<h(0)$．又因为存在唯一的整数$x_0$，使得$g(x)<h(x)$，所以$\begin{cases}g(1)\geqslant h(1)\\g(-1)\geqslant h(-1)\end{cases}$，即$\begin{cases}e\geqslant -a\\-\frac{3}{e}\geqslant -2a\end{cases}$，解得$a\geqslant\frac{3}{2e}$，又因为$a<1$，所以$\frac{3}{2e}\leqslant a<1$．故选 D.

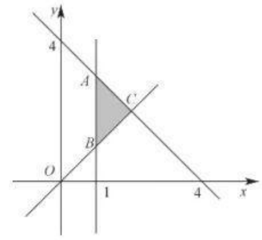


13.**解析**　由题意可知函数$y=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$是奇函数，所以$\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)=0$，即 $\ln\left(a+x^2-x^2\right)=\ln a=0$，解得$a=1$．

14. **解析**　如图所示，设圆心为$C(a,0)$，其中$a>0$，连接AC，则半径$AC=BC=4-a$，由题可得$OA=2$，所以$(4-a)^2=a^2+2^2$，解得$a=\frac{3}{2}$，故圆的方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$．



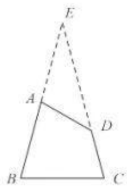
(第 14 题解析图)



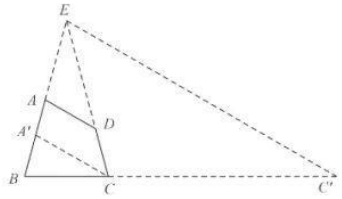
(第 15 题解析图)

15.解析　作出可行域如图中阴影部分所示，由斜率的意义知，$\frac{y}{x}$ 是可行域内一点与原点连线的斜率，由图可知，点 $A(1,3)$ 与原点连线的斜率最大，故 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 3.

16.解析　解法一：如图所示，$\angle B=\angle C=\angle BAD=75^\circ$，延长 BA，CD 交于点 E，则可知 $BE=CE$，且在 $\triangle ADE$ 中，$\angle DAE=105^\circ$，$\angle ADE=45^\circ$，$\angle E=30^\circ$．在 $\triangle BEC$ 中，由正弦定理可得 $BE=CE=\dfrac{BC\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，所以由题意可得 $DE\in\left(0,\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$．在 $\triangle ADE$ 中，由正弦定理可得 $AE=\dfrac{DE\cdot\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\left(\sqrt{3}-1\right)DE$，所以 $AE\in\left(0,2\sqrt{2}\right)$．又因为 $AB=BE-AE$，所以 AB 的取值范围是 $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$．



(第 16 题解法一图)



(第 16 题解法二图)

解法二（构造法）：如图所示，构造 $\triangle BEC$，使得 $\angle B=\angle BCE=75^\circ$，则 $\angle BEC=30^\circ$，取 BE 边上一点 A，CE 边上一点 D，使得 $\angle BAD=75^\circ$．若平移 AD 使点 D 与点 C 重合，此时四边形 $ABCD$ 退化为 $\triangle A'BC$，且可在 $\triangle A'BC$ 中利用正弦定理求得 $A'B=\dfrac{2\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$；若平移 AD 使点 D 与点 E 重合，此时四边形 $ABCD$ 退化为 $\triangle BEC'$，且可在 $\triangle BEC$ 中利用正弦定理求得 $BE=\dfrac{2\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$．又因为 $ABCD$ 是平面四边形，所以点 D 应在点 C 与点 E 之间，且不与点 C 与点 E 重合，所以 AB 的取值范围是 $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$．

17. **解　析**　（1）由 $a_n^2+2a_n=4S_n+3$ ①

可得 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$ ②

式①－式②得 $(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}-a_n-2)=0$．又因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$．

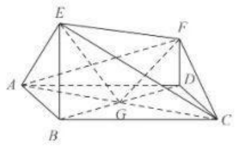
当 $n=1$ 时，$a_1^2+2a_1=4S_1+3$，即 $a_1^2-2a_1-3=0$，解得 $a_1=3$ 或 $a_1=-1$（舍去），所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，通项公式为 $a_n=2n+1$．

（2）由 $a_n=2n+1$ 可得 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$．

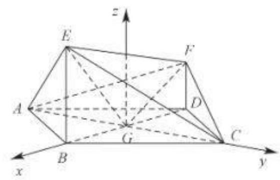
记数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n，则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{n}{3(2n+3)}$．

18.**解析**　（1）连接 BD，设 $BD\cap AC=G$，连接 EG，FG，EF．在菱形 $ABCD$ 中，取 $GB=1$，由 $\angle ABC=120°$，得 $AG=GC=\sqrt{3}$．由 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC$，可知 $AE=EC$．又 $AE\perp EC$，所以 $EG=\sqrt{3}$，且 $EG\perp AC$．在 $\mathrm{Rt}\triangle EBG$ 中，可得 $BE=\sqrt{2}$，故 $DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．在 $\mathrm{Rt}\triangle FDG$ 中，$FG=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．在直角梯形 $BDFE$ 中，由 $BD=2$，$BE=\sqrt{2}$，$DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $EF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $EF^2=EG^2+FG^2$，所以 $EG\perp FG$．又因为 $AC\cap FG=G$，所以 $EG\perp$ 平面 AFC．又因为 $EG\subset$ 平面 AEC，所以平面 $AEC\perp$ 平面 AFC．

（2）如图所示，以 G 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$ 的方向为 x,y 轴正方向，$|\overrightarrow{GB}|$ 为单位长度，建立空间直角坐标系 $G-xyz$．由（1）知 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$E(1,0,\sqrt{2})$，$F\left(-1,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CF}=\left(-1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CF}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．



（第 18(1)题解析图）



（第 18(2)题解析图）

19.解析　（1）由散点图变化情况可知选择 $y=c+d\sqrt{x}$ 较为适宜.

（2）由题意知 $d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)^2}=\dfrac{108.8}{1.6}=68$．又 $y=c+d\sqrt{x}$ 一定过点 $\left(\overline{\omega},\overline{y}\right)$，所以 $c=\overline{y}-d\overline{\omega}=563-68\times6.8=100.6$，所以 y 与 x 的回归方程为 $y=100.6+68\sqrt{x}$.

（3）①由（2）知，当 $x=49$ 时，$y=100.6+68\times\sqrt{49}=576.6(\mathrm{t})$，$z=0.2\times576.6-49=66.32$（千元），所以当年宣传费为 $x=49$ 时，年销售量为 $576.6(\mathrm{t})$，利润预估为 66.32 千元.

②由（2）知，$z=0.2y-x=0.2\left(100.6+68\sqrt{x}\right)-x=13.6\sqrt{x}-x+20.12=-\left(\sqrt{x}-6.8\right)^2+6.8^2+20.12$，所以当 $\sqrt{x}=6.8$ 时，年利润的预估值最大，即 $x=6.8^2=46.24$（千元）.

20.解析　（1）由题意知，$k=0$ 时，联立 $\begin{cases}y=a\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$，解得 $M\left(2\sqrt{a},a\right)$，$N\left(-2\sqrt{a},a\right)$．又 $y'=\dfrac{x}{2}$，在点 M 处，$k_M=\sqrt{a}$，切线方程为 $y-a=\sqrt{a}\left(x-2\sqrt{a}\right)$，即 $\sqrt{a}x-y-a=0$，在点 N 处，$k_N=-\sqrt{a}$，切线方程为 $y-a=-\sqrt{a}\left(x+2\sqrt{a}\right)$，即 $\sqrt{a}x+y+a=0$．故所求切线方程为 $\sqrt{a}x-y-a=0$ 和 $\sqrt{a}x+y+a=0$.

（2）存在符合题意的点，证明如下：设点 $P\ (0,b)$ 为符合题意的点，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2．联立方程 $\begin{cases}y=kx+a\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$，得 $x^2-4kx-4a=0$，故 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$，从而 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-b}{x_1}+\dfrac{y_2-b}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(a-b)\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}=\dfrac{k(a+b)}{a}$．当 $b=-a$ 时，有 $k_1+k_2=0$，则直线 PM 与直线 PN 的倾斜角互补，故 $\angle OPM=\angle OPN$，所以点 $P(0,-a)$ 符合题意.

21.**解析**　(1) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，即

$\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0\\3x_0^2+a=0\end{cases}$，解得 $x_0=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{3}{4}$，所以当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

(2) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，从而 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\leqslant g(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 无零点；

当 $x=1$ 时，若 $a=-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\geqslant 0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是 $h(x)$ 的零点；

若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)<0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 $x=1$ 不是 $h(x)$ 的零点；

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的零点个数.

(ⅰ) 若 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant 0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在 $(0,1)$ 无零点，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调．而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $a\leqslant -3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点；当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 没有零点.

(ⅱ) 若 $-3<a<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 单调递减，在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},1\right)$ 单调递增，故在 $(0,1)$ 中，当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时，$f(x)$ 取最小值，最小值为 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点；

②若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点；

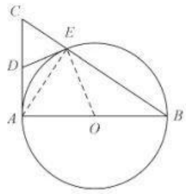
③若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有两个零点；当 $-3<a\leqslant -\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点.

综上所述，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

22.**解析**　(1) 连接 OE，AE，由已知得 $AE\perp BC$，$AC\perp AB$．在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中，由已知得 $DE=DC$，故 $\angle DEC=\angle DCE$，所以 $\angle OBE=\angle OEB$．又 $\angle ACB+\angle ABC=90^\circ$，所以 $\angle DEC+\angle OEB=90^\circ$，

故$\angle OED = 90^\circ$，DE为圆O的切线.

（2）设$CE = 1$，$AE = x$，则$OA = \sqrt{3}CE = \sqrt{3}$，$AB = 2\sqrt{3}$，$BE = \sqrt{12 - x^2}$，由射影定理可得$AE^2 = CE \cdot BE$，所以$x^2 = \sqrt{12 - x^2}$，解得$x = \sqrt{3}$，所以在$\triangle ACE$中，有$\tan \angle ACE = \frac{AE}{EC} = \sqrt{3}$，又$\angle ACE$在$\triangle ABC$中，所以$\angle ACB = 60^\circ$.



（第22题解析图）

23. **解析**　（1）因为$x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，所以C_1的极坐标方程为$\rho\cos\theta = -2$，C_2的极坐标方程为$\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$.

（2）解法一：C_3的直角坐标系方程为$y = x$，所以C_2的圆心到直线C_3的距离$d = \frac{|1-2|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$|MN| = 2\sqrt{1-d^2} = \sqrt{2}$，所以$S_{\triangle C_2MN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

解法二：将$\theta = \frac{\pi}{4}$代入$\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$，得$\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$，解得$\rho_1 = 2\sqrt{2}$，$\rho_2 = \sqrt{2}$，所以$\rho_1 - \rho_2 = \sqrt{2}$，即$|MN| = \sqrt{2}$. 由于$C_2$的半径为1，所以$\triangle C_2MN$的面积为$\frac{1}{2}$.

24.**解析**　（1）当$a = 1$时，$f(x) > 1$，即$|x+1| - 2|x-1| - 1 > 0$.

当$x \leqslant -1$时，不等式化为$x - 4 > 0$，无解；

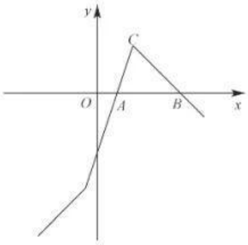
当$-1 < x < 1$时，不等式化为$3x - 2 > 0$，解得$\frac{2}{3} < x < 1$；

当$x \geqslant 1$时，不等式化为$-x + 2 > 0$，解得$1 \leqslant x < 2$.

综上所述，当$a = 1$时，$f(x) > 1$的解集为$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

（2）$a > 0$，$f(x) = \begin{cases} x - 1 - 2a, x < -1 \\ 3x + 1 - 2a, -1 \leqslant x \leqslant a \\ -x + 1 + 2a, x > a \end{cases}$，如图所示，函数$f(x)$的图像与$x$轴所围成三角形的三个顶点分别为$A\left(\frac{2a-1}{3}, 0\right)$，$B(2a+1, 0)$，$C(a, a+1)$，$S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3}(a+1)^2$，即$\frac{2}{3}(a+1)^2 > 6$，解得$a > 2$，

所以a的取值范围是$(2,+\infty)$.



（第 24 题解析图）