2015年高考数学（全国Ⅰ卷）理科试卷

注意事项：

1. **本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷1至3页，第Ⅱ卷3至6页。**
2. **答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。**
3. **全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。**
4. **考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。**

第Ⅰ卷

一、　选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设复数z满足$\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

2.$\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=$（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

3.设命题$p:\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$，则$\neg p$为（　　）

A．$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$　　B．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$

C．$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$　　D．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2=2^n$

4.投篮测试中，每人投3次，至少投中2次才能通过测试，已知某同学每次投篮投中的概率为0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为（　　）

A．0.648　　B．0.432　　C．0.36　　D．0.312

5.已知$M(x_0,y_0)$是双曲线$C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$上的一点，F_1，F_2是C的两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则$y_0$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

C．$\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺.问:积及为米几何?"其意思为:"在屋内墙角处堆放米(如图所示，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧度为8尺，米堆的高为5尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少?"已知1斛米的体积约为1.62

立方尺，圆周率约为3，估算出堆放的米约有（　　）

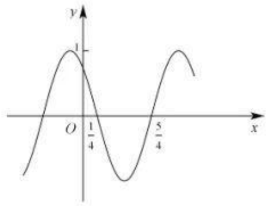
A．14斛　　B．22斛　　C．36斛　　D．66斛

7.设D为$\triangle ABC$所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

8.函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$的部分图像如图所示，则$f\left(x\right)$的单调递减区间为（　　）



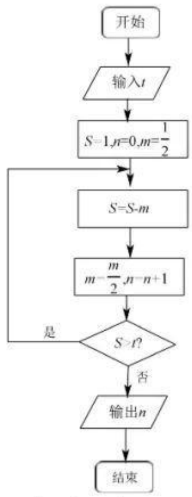
A．$\left(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

B．$\left(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C．$\left(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D．$\left(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

9.执行右面的程序框图，如果输入的$t=0.01$，则输出的$n=$（　　）



A．5

B．6

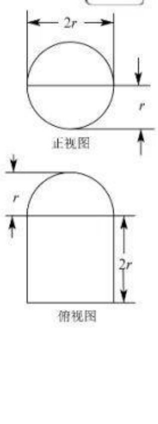
C．7

D．8

10.$\left(x^2+x+y\right)^5$的展开式中，x^5y^2的系数为（　　）

A．10　　B．20　　C．30　　D．60

11.圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示.若该几何体的表面积为$16+20\pi$，则$r=$（　　）



A．1

B．2

C．4

D．8

12.设函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}\left(2x-1\right)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f\left(x_0\right)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　　B. $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第（13）～第（21）题为必考题，每个试题考生都必须做答。第（22）题～第（24）题为选考题，考生根据要求做答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13.若函数 $f\left(x\right)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$________________.

14.一个圆经过椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为____________________.

15.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\end{cases}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为__________________.

16.在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则 AB 的取值范围是____________________.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）S_n 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

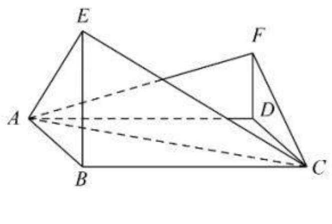
（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式;

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和.

18.（本小题满分 12 分）如图所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120^\circ$，E，F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\perp$ 平面 $ABCD$，$BE=2DF$，$AE\perp EC$.

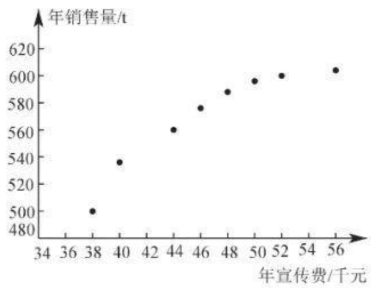
（1）求证：平面 $AEC\perp$ 平面 AFC；

（2）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）某公司为确定下一年投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，

对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 $y_i\left(i=1,2,\cdots,8\right)$ 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$ ，$\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$ ，

（1）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）;

（2）根据（1）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程;

（3）已知这种产品的年利润 z 与 x，y 的关系式 $z=0.2y-x$，根据（2）的结果回答下列问题:

①年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

②年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据 $\left(u_1,v_1\right)\left(u_2,v_2\right)$，…，$\left(u_n,v_n\right)$，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)\left(v_i-\overline{v}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

20.（本小题满分 12 分） 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l:y=kx+a\left(a>0\right)$ 交于 M，N 两点.

（1）当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

（2）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，$g\left(x\right)=-\ln x$.

（1）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线；

（2）用 $\min\left\{m,n\right\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h\left(x\right)=\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}\left(x>0\right)$，讨论 $h\left(x\right)$ 零点的个数.

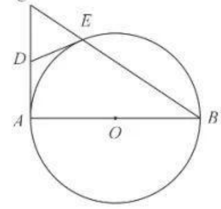
请考生在第（22），（23），（24）三题中任选一题做答。注意：只能做所选定的题目。如果多做，则按所做的第一个题目计分，做答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

22.（本小题满分 10 分）选修 4—1：几何证明选讲

如图所示，AB 是圆 O 的直径，AC 是圆 O 的切线，BC 交圆 O 于点 E.

（1）若 D 为 AC 的中点，求证：DE 是圆 O 的切线；

（2）若 $OA=\sqrt{3}CE$，求 $\angle ACB$ 的大小.



23.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1:x=-2$，圆 $C_2:\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$，以坐标原点为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2）若直线 C_3 的极坐标为 $\theta=\frac{\pi}{4}\left(\rho\in\mathbf{R}\right)$，设 C_2 与 C_3 的交点为 M，N，求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f\left(x\right)=\left|x+1\right|-2\left|x-a\right|$，$a>0$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f\left(x\right)>1$ 的解集；

（2）若 $f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.