

2015年高考数学(全国I卷)文科试卷

第I卷(选择题 共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ().
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
2. 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC} =$ ().
A. $(-7, -4)$ B. $(7, 4)$ C. $(-1, 4)$ D. $(1, 4)$
3. 已知复数 z 满足 $(z-1)i = 1+i$, 则 $z =$ ().
A. $-2-i$ B. $-2+i$ C. $2-i$ D. $2+i$
4. 如果3个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这3个数为一组勾股数. 从1, 2, 3, 4, 5中任取3个不同的数, 则这3个数构成一组勾股数的概率为 ().
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{20}$
5. 已知椭圆 E 的中心在坐标原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB| =$ ().
A. 3 B. 6 C. 9 D. 12
6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺, 问‘积及为米几何?’”其意思为: “在屋内墙角处堆放米(如图所示, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为8尺, 米堆的高为5尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?”已知1斛米的体积约为1.62立方尺, 圆周率约为3, 估算出堆放的米约有 ().
A. 14斛 B. 22斛 C. 36斛 D. 66斛

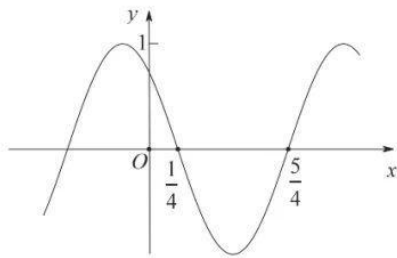


7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8 = 4S_4$, 则 $a_{10} = ()$.

- A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{19}{2}$ C. 10 D. 12

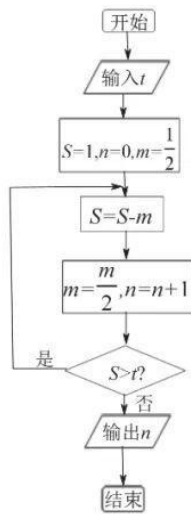
8. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $()$.

- A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}) (k \in \mathbf{Z})$ B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}) (k \in \mathbf{Z})$
 C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}) (k \in \mathbf{Z})$ D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}) (k \in \mathbf{Z})$



9. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t = 0.01$, 则输出的 $n = ()$.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8



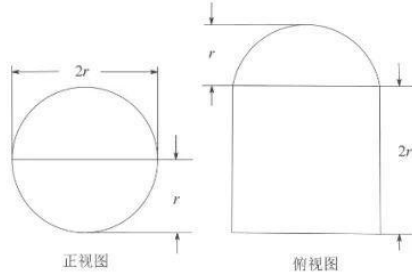
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1 \\ -\log_2(x+1), & x > 1 \end{cases}$, 且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a) = ()$.

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯

视图如图所示.若该几何体的表面积为 $16+20\pi$,则 $r = (\quad)$.

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8



12. 设函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称,且 $f(-2) + f(-4) = 1$,则 $a = (\quad)$.

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

第II卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分.第(13)题~第(21)题为必考题,每个试题考生都必须作答.第(22)题~第(24)题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $S_n = 126$,则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(2, 7)$,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$,则 $z = 3x + y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点, P 是 C 的左支上一点, $A(0, 6\sqrt{6})$,当 $\triangle APF$ 周长最小时,该三角形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$.

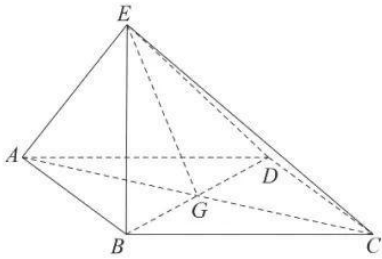
(1) 若 $a = b$,求 $\cos B$;

(2) 设 $\angle B = 90^\circ$,且 $a = \sqrt{2}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分) 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 BED ;

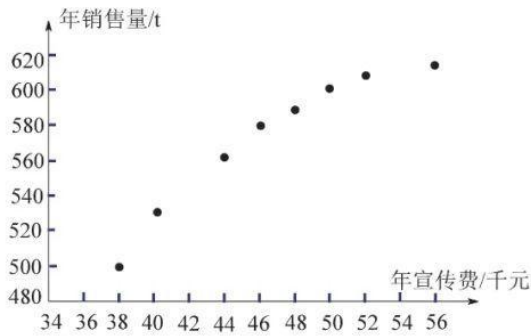
(2) 若 $\angle ABC = 120^\circ$, $AE \perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.



19. (本小题满分 12 分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元)

对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$)

数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

(1) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由);

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$, 根据 (2) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计

$$\text{分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

20. (本小题满分 12 分) 已知过点 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = 12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

21. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$, 根据 (2) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计

$$\text{分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

20. (本小题满分 12 分) 已知过点 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = 12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

21. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

(2) 求证: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

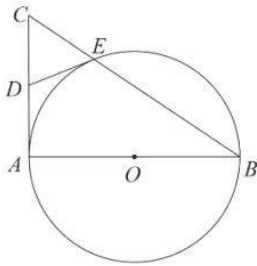
请考生在 22、23、24 三题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图所示, AB 是圆 O 直径, AC 是圆 O 切线, BC 交圆 O 于点 E .

(1) 若 D 为 AC 中点, 求证: DE 是圆 O 的切线;

(2) 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程.

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.