2015年高考数学（全国Ⅰ卷）文科解析

1. **解析** 当$3n+2\leqslant 14$，得$n\leqslant 4$.
由$x=3n+2$，当$n=0$时，$x=2$；当$n=1$时，$x=5$；
当$n=2$时，$x=8$；当$n=3$时，$x=11$；当$n=4$时，$x=14$.

所以$A\bigcap B=\{8,14\}$，则集合$A\bigcap B$中含元素个数为2.故选D.

2. **解析** $\overrightarrow{BA}=(0-3,1-2)=(-3,-1)$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(-3-4,-1-3)=(-7,-4)$.故选A.

3. **解析** 由题意可得$z\mathrm{i}=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$.故选C.

4. **解析** 由$1^2=1$，$2^2=4,3^2=9,4^2=16,5^2=25$，

可知只有$(3,4,5)$是一组勾股数.

从$1,2,3,4,5$中任取3个不同的数，其基本事件有：

$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)$，$(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5)$，

$(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)$，共10种.

则从$1,2,3,4,5$中任取3个不同的数，则这3个数构成一组勾股数的概率$P=\dfrac{1}{10}$.故选C.

5. **解析** $y^2=8x$的焦点为$(2,0)$，准线方程为$x=-2$.

由E的右焦点与$y^2=8x$的焦点重合，可得$c=2$.

又$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，得$a=4$，$b^2=12$，所以椭圆$E$的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

当$x=-2$时，$\dfrac{(-2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，得$y=\pm 3$，即$|AB|=6$.故选B.

6. **解析** 由$l=\alpha r$，得$r=\dfrac{l}{\alpha}=\dfrac{8}{\frac{3}{2}}=\dfrac{16}{3}$.

$V=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times 3\times\left(\dfrac{16}{3}\right)^2\times 5=\dfrac{320}{9}$.

故堆放的米约有$\dfrac{320}{9}\div 1.62\approx 22$（斛）.故选B.

7. **解析** **解法一：** 由$S_8=4S_4$，$d=1$，知$8a_1+\dfrac{8(8-1)}{2}\times 1=4\left[4a_1+\dfrac{4(4-1)}{2}\times 1\right]$，

解得 $a_1=\frac{1}{2}$.所以 $a_{10}=\frac{1}{2}+(10-1)\times 1=\frac{19}{2}$.故选 B.

解法二： 由 $S_8=4S_4$，即 $4(a_1+a_8)=4\times 2(a_1+a_4)$，可得 $a_8=a_1+2a_4$.

又公差 $d=1$，所以 $a_8=a_1+7$，则 $2a_4=7$，解得 $a_4=\frac{7}{2}$.

所以 $a_{10}=a_4+6=\frac{19}{2}$.故选 B.

8. **解析**　由图可知 $\frac{T}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1$，得 $T=2$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

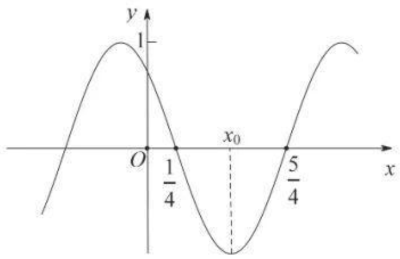
画出图中函数 $f(x)$ 的一条对称轴 $x=x_0$，如图所示.

由图可知 $x_0=\frac{3}{4}$，则 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=-1$，

可得 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\pi$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，得 $f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi\leqslant\pi x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi$，得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $2k-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2k+\frac{3}{4}$.

故选 D.



9. **解析**　由程序框图可知，

第一次循环为：$S=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.01$，　$m=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$，$n=0+1=1$；

第二次循环为：$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0.01$，$m=\frac{1}{8}$，$n=2$；

第三次循环为：$S=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}>0.01$，$m=\frac{1}{16}$，$n=3$；

第四次循环为：$S=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}>0.01$，$m=\frac{1}{32}$，$n=4$；

第五次循环为：$S=\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=\frac{1}{32}>0.01$，$m=\frac{1}{64}$，$n=5$；

第六次循环为：$S=\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{64}>0.01$，$m=\frac{1}{128}$，$n=6$；

第七次循环为：$S=\frac{1}{64}-\frac{1}{128}=\frac{1}{128}\leqslant 0.01$，$m=\frac{1}{256}$，$n=7$.

此时循环结束，输出 $n=7$.故选 C.

10. **解析** 当 $a\leqslant 1$ 时，$f(a)=2^{a-1}-2=-3$，即 $2^{a-1}=-1$，无解；

当 $a>1$ 时，$f(a)=-\log_2(a+1)=-3$，即 $\log_2(a+1)=3=\log_2 2^3$，

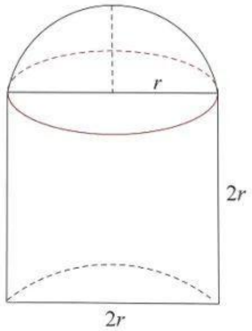
得 $a+1=8$，所以 $a=7$，符合 $a>1$.
综上可知，$a=7$.

则 $f(6-a)=f(6-7)=f(-1)=2^{-1-1}-2=-\dfrac{7}{4}$.故选 A.

11. **解析** 由几何体的视图，还原其立体图形，并调整其摆放姿势，让半圆柱体在下方，半球在上方，如图所示.

$$S=2r\cdot 2r+\pi\cdot r\cdot 2r+\pi r^2+\frac{4\pi r^2}{2}=4r^2+5\pi r^2=16+20\pi，得 r=2.$$

故选 B.



12. **解析** 设 (x,y) 为 $f(x)$ 图像上一点，则 (x,y) 关于 $y=-x$ 的对称点为 $(-y,-x)$，

代入 $y=2^{x+a}$，得 $-x=2^{-y+a}$，①

对①两边取以 2 为底的对数，得 $\log_2(-x)=-y+a$，即 $y=-\left[\log_2(-x)-a\right]$.

又 $f(-2)+f(-4)=1$，即 $-(\log_2 2-a)-(\log_2 4-a)=1$，

得 $a-1-(2-a)=1$，得 $a=2$.故选 C.

13. **解析** 由 $a_{n+1}=2a_n$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为2的等比数列.

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=126，得 n=6.$$

14. **解析** 由题意可得 $f(1)=a+2$，$f'(1)=3a+1$，

所以切线方程为 $y-(a+2)=(3a+1)(x-1)$.

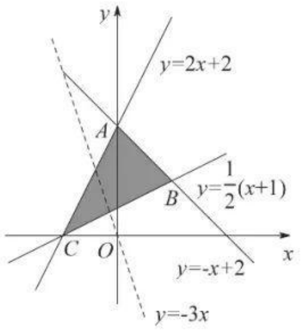
又过点$(2,7)$，即$7-a-2=(3a+1)(2-1)$，解得$a=1$.

15. **解析**　画出满足不等式组的可行域，如图中阴影部分所示.

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}(x+1)\\y=-x+2\end{cases}$，得$B(1,1)$.

由图可知当直线$y=-3x$经过点$B(1,1)$时，z取得最大值.

$z_{\max}=1+3=4$.



16. **解析**　设双曲线的左焦点为F_1，连接AF，与双曲线左支交于点P，连接PF.

则此P点即为使得$\triangle APF$周长最小时的点P，如图所示.

证明如下：由双曲线的定义知，$PF-PF_1=2a=2$.所以$PF=PF_1+2$.

又$C_{\triangle APF}=AF+AP+PF$，所以$C_{\triangle APF}=AF+AP+PF_1+2$，

所以当点A，P，F_1在同一条直线上时，周长取得最小值.

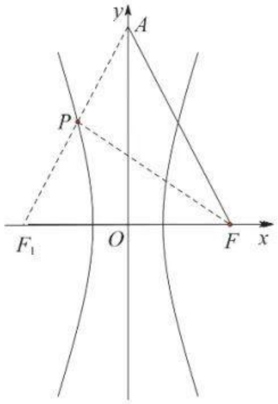
由题意可得AF_1所在直线方程为$y=2\sqrt{6}(x+3)$，

同理可得AF的直线方程为$y=-2\sqrt{6}(x-3)$.

联立$\begin{cases}y=2\sqrt{6}(x+3)\\x^2-\frac{y^2}{8}=1\end{cases}$，解得$P(-2,2\sqrt{6})$.

则$d(P,AF)=\frac{\left|-2\times2\sqrt{6}+2\sqrt{6}\times1-6\sqrt{6}\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{6}}{5}$.

又$AF=\sqrt{3^2+\left(6\sqrt{6}\right)^2}=15$，所以$S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}\times15\times\frac{8\sqrt{6}}{5}=12\sqrt{6}$.



17. **解析** （1）由正弦定理得，$b^2=2ac$.又$a=b$，

所以$a^2=2ac$，即$a=2c$.则$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-a^2}{2a\cdot\dfrac{a}{2}}=\dfrac{1}{4}$.

（2）**解法一**：因为$\angle B=90^\circ$，所以$\sin^2 B=1=2\sin A\sin C=2\sin A\sin\left(90^\circ-A\right)$，

即$2\sin A\cos A=1$，亦即$\sin 2A=1$.

又因为在$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，所以$0<\angle A<90^\circ$，

则$2\angle A=90^\circ$，得$\angle A=45^\circ$.

所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，得$a=c=\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

解法二：由（1）可知$b^2=2ac$，①

因为$\angle B=90^\circ$，所以$a^2+c^2=b^2$，②

将②代入①得$\left(a-c\right)^2=0$，则$a=c=\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

18. **解析** （1）因为$BE\perp$平面$ABCD$，所以$BE\perp AC$.

又$ABCD$为菱形，所以$AC\perp BD$.

又因为$BD\cap BE=B$，BD，$BE\subset$平面BED，

所以$AC\perp$平面BED.又$AC\subset$平面AEC，所以平面$AEC\perp$平面BED.

（2）在菱形$ABCD$中，取$AB=BC=CD=AD=2x$，

又$\angle ABC=120^\circ$，所以$AG=GC=\sqrt{3}x$，$BG=GD=x$.

在$\triangle AEC$中，$\angle AEC=90^\circ$，所以$EG=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{3}x$，

所以在$Rt\triangle EBG$中，$BE=\sqrt{EG^2-BG^2}=\sqrt{2}x$，

所以$V_{E-ACD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2x\cdot2x\cdot\sin120^\circ\cdot\sqrt{2}x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x^3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得$x=1$.

在$Rt\triangle EBA$，$Rt\triangle EBC$，$Rt\triangle EBD$中，

可得$AE=EC=ED=\sqrt{6}$.

所以三棱锥的侧面积$S_{侧}=2\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}=3+2\sqrt{5}$.

19. **解析** （1）由散点图变化情况选择$y=c+d\sqrt{x}$较为适宜.

（2）由题意知$d=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)^2}=\dfrac{108.8}{1.6}=68$.

又$y=c+d\sqrt{x}$一定过点$\left(\overline{w},\overline{y}\right)$，所以$c=\overline{y}-d\overline{w}=563-68\times 6.8=100.6$，

所以y关于x的回归方程为$y=100.6+68\sqrt{x}$.

（3）（ⅰ）由（2）可知当$x=49$时，$y=100.6+68\sqrt{49}=576.6$，

$z=0.2\times 576.6-49=66.32$.

所以年宣传费$x=49$时，年销售量为576.6t，年利润的预报值为66.32千元.

（ⅱ）$z=0.2y-x=0.2\left(100.6+68\sqrt{x}\right)-x=13.6\sqrt{x}-x+20.12=$

$-\left(\sqrt{x}-6.8\right)^2+6.8^2+20.12$.

所以当$\sqrt{x}=6.8$，即$x=6.8^2=46.24$（千元）时，年利润的预报值最大，

20. **解析** （1）由l与圆交于M,N两点，所以直线的斜率必存在.

设直线l的斜率为k，则直线l的方程为$y=kx+1$.

由圆C的方程，可得圆心为$C(2,3)$，

则$d(C,l)<1$，即$\dfrac{|2k-3+1|}{\sqrt{1+k^2}}<1$，解得$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(x_2,y_2)$，

$\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=x_1\bullet x_2+y_1\bullet y_2=12$.

把直线$y=kx+1$代入到$(x-2)^2+(y-3)^2=1$中，

得$(k^2+1)x^2-(4+4k)x+7=0$.

由韦达定理得$x_1x_2=\dfrac{7}{k^2+1}$，$x_1+x_2=\dfrac{4+4k}{k^2+1}$.

则$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=x_1\cdot x_2+(kx_1+1)(kx_2+1)=\dfrac{4k+11k^2+7}{1+k^2}+1=12$，

解得$k=1$.所以直线l的方程为$y=x+1$.

又圆心$C(2,3)$到直线l的距离$d(C,l)=\dfrac{|2-3+1|}{\sqrt{1^2+1}}=0$，即直线$l$过圆心$C$.

所以$|MN|=2$.

21. **解析**　（1）$f(x)=e^{2x}-a\ln x(x>0)$，$f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}$.

显然当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$恒成立，$f'(x)$无零点.

当$a>0$时，取$g(x)=f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}$，

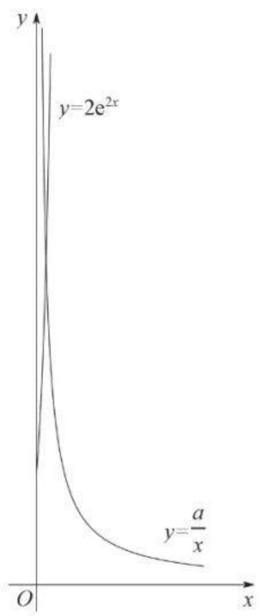
则$g'(x)=4e^{2x}+\dfrac{a}{x^2}>0$，即$f'(x)$单调递增.

令$g(x)=f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}=0$，即$2e^{2x}=\dfrac{a}{x}$.

画出$y=2e^{2x}$与$y=\dfrac{a}{x}$的图像，如图所示.

由图可知，$f'(x)$必有零点，

所以导函数$f'(x)$存在唯一零点.



（2）由（1）可知$f'(x)$有唯一零点，设零点为x_0，

由图可知，当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，即$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，即 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0$.

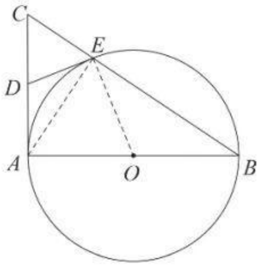
又 $f'(x_0)=2e^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，解得 $e^{2x_0}=\dfrac{a}{2x_0}$.①

①两边分别取自然对数，得 $2x_0=\ln a-\ln 2x_0$，即 $\ln x_0=\ln\dfrac{a}{2}-2x_0$.

所以 $f(x_0)=\dfrac{a}{2x_0}-a\left(\ln\dfrac{a}{2}-2x_0\right)=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0-a\ln\dfrac{a}{2}\geqslant$

$2a-a\ln\dfrac{a}{2}=2a+a\ln\dfrac{2}{a}$（当且仅当 $\dfrac{a}{2x_0}=2ax_0$，即 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时取等号）.

22. **解析** （1）连接 OE，AE，如图所示.



因为 AB 为直径，所以 $AE\perp BC$.
又 D 为 AC 中点，所以 $DE=AD$，所以 $\angle CAE=\angle DEA$.①
因为 AC 为切线，所以 $\angle CAB=90^\circ$，即 $\angle CAE+EAO=90^\circ$.②
在圆 O 中，$OA=OE$，所以 $\angle EAO=\angle OEA$.③
结合①②③，可得 $\angle DEA+\angle OEA=90^\circ$，即 $OE\perp DE$.
所以 DE 是圆 O 的切线.
（2）设 $\dfrac{AB}{AC}=x,\dfrac{CB}{AC}=y$，
由切割线定理，可得 $AC^2=CE\cdot CB$.

又 $OA=\sqrt{3}CE$，所以 $AC^2=\dfrac{AB}{2\sqrt{3}}\cdot CB$,

整理可得 $2\sqrt{3}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{CB}{AC}$，即 $2\sqrt{3}=x\cdot y$.
在 Rt△ABC 中，$AB^2+AC^2=CB^2$，

整理可得 $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2+1=\left(\dfrac{CB}{AC}\right)^2$，即 $x^2+1=y^2$.

联立 $\begin{cases}2\sqrt{3}=x\cdot y\\x^2+1=y^2\end{cases}$，解得 $x=\sqrt{3}$.

所以 $\tan\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}=\sqrt{3}$，则 $\angle ACB=60^\circ$.

23. **解析** （1）由C_1：$x=-2$，可得极坐标方程为$\rho\cos\theta=-2$，

由C_2：$x^2-2x+1+y^2-4y+4=1$，

得极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$．

（2）由题意可得C_3：$y=x\left(x\geqslant 0\right)$.

由C_2：$\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$，得圆心$C_2\left(1,2\right)$.

则$d\left(C_2,MN\right)=\dfrac{\left|1-2\right|}{\sqrt{1+\left(-1\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由半径、弦心距及半弦长的关系，可得$\left|MN\right|=2\sqrt{1-d^2}=\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle C_2MN}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

24. **解析** （1）当$a=1$时，$f\left(x\right)>1$，即$\left|x+1\right|-2\left|x-1\right|-1>0$．①

当$x\leqslant -1$时，不等式①化简为$x-4>0$，无解；

当$-1<x<1$时，不等式①化简为$3x-2>0$，解得$\dfrac{2}{3}<x<1$；

当$x\geqslant 1$时，不等式①化简为$-x+2>0$，解得$1\leqslant x<2$．

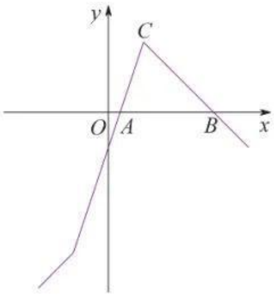
综上所述，当$a=1$时，$f\left(x\right)>1$的解集为$\left(\dfrac{2}{3},2\right)$.

（2）由$a>0$，可得$f\left(x\right)=\begin{cases}x-1-2a,x<-1\\3x+1-2a,-1\leqslant x\leqslant a\\-x+1+2a,x>a\end{cases}$.

作出$f\left(x\right)$的图像，如图所示.

图像与x轴所围成三角形的三个顶点分别为$A\left(\dfrac{2a-1}{3},0\right)$，$B\left(2a+1,0\right)$，$C\left(a,a+1\right)$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{3}\left(a+1\right)^2$.由$\dfrac{2}{3}\left(a+1\right)^2>6$，解得$a>2$，所以$a$的取值范围是$\left(2,+\infty\right)$.


y
C
O
A
B
x