数学试题（文史类）参考答案

一、　选择题：本大题考查基础知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

1.A　2.D　3.D　4.C　5.C　6.D　7.A　8.B　9.B　10.C　11.A　12.B

二、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 4 分，共 16 分。

13. 25　14. $\sqrt{2}$　15. 1　16. 9

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.本小题主要考查等差数列、等比数列、数列求和等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想、划归与转化思想。满分 12 分。

解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d。

由已知得$\begin{cases} a_1+d=4 \\ (a_1+3d)+(a_1+6d)=15 \end{cases}$

解得$\begin{cases} a_1=3 \\ d=1 \end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n+2$

（II）由（I）可得$b_n=2^n+n$

所以$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{10}=(2+1)=(2^2+2)=(2^3+3)+\cdots\cdots+(2^{10}+10)$

$=(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10})+$（1+2+3+……+10）

$=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}+\dfrac{(1+10)\times10}{2}$

$=(2^{11}-2)+55$

$=2^{11}+53=2101$

18.本小题主要考查古典概型，频率分布表、平均数等基础知识，考查数据处理能力、运算求解能力、应用意识，考查必然与或然思想等，满分 12 分。

解法一：（I）融合指数在[7，8]内的“省级卫视新闻台”记为A_1，A_2，A_3；融合指数在[4,5）内的“省级卫视新闻台”记为B_1，B_2，从融合指数在[4,5）和[7，8]内的“省级卫视新闻台”中随机抽取 2 家所有基本事件是：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},$

$\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{B_1,B_2\}$，共 10 个。

期中，至少有 1 家融合指数在[7，8]内的基本事件是$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},$

$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\}$, 共 9 个。

所以所求的概率 $P=\dfrac{9}{10}$。

（II）这 20 家“省级卫视新闻台”的融合指数平均数等于

$$4.5\times\frac{2}{20}+5.5\times\frac{8}{20}+6.5\times\frac{7}{20}+7.5\times\frac{3}{20}$$

=6.05.

解法二：（I）融合指数在[7，8]内的“省级卫视新闻台”记为 A_1， A_2， A_3；融合指数在[4.5）内的“省级卫视新闻台”记为 B_1， B_2，从融合指数在[4,5）和[7，8]内的“省级卫视新闻台”中随机抽取 2 家的所有的基本事件是：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\}$,

$\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{B_1,B_2\}$，共 10 个。

其中，没有 1 家融合指数在[7，8]内的基本事件是 $\{B_1,B_2\}$，共一个。

所以所求的概率 $P=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$。

（II）同解法一。

19.本小题主要考查抛物线、直线与圆的位置关系、直线与抛物线的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想。妈妈粉 12 分

解法一：（I）由抛物线的定义得

$$|\mathrm{AF}|=2+\frac{p}{2}.$$

因为 $|\mathrm{AF}|=3$，即 $2+\dfrac{p}{2}=3$，

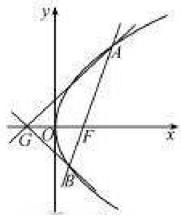
解得 $p=2$，

所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

（II）因为点 $\mathrm{A}(2,m)$ 在抛物线 $\mathrm{E}: y^2=4x$ 上，

所以 $m=\pm2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设 $\mathrm{A}(2,2\sqrt{2})$.

由 $\mathrm{A}(2,2\sqrt{2})$， $\mathrm{F}(1,0)$ 可得直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.



由$\begin{cases} y=2\sqrt{2}\left(x-1\right) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$2x^2-5x+2=0$，

解得$x=2$或$x=\dfrac{1}{2}$，从而$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又$\mathrm{G}\left(-1,0\right)$，

所以$k_{\mathrm{GA}}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-\left(-1\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$k_{\mathrm{GB}}=\dfrac{-\sqrt{2}-0}{\dfrac{1}{2}-\left(-1\right)}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

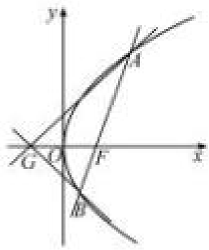
所以$k_{\mathrm{GA}}+k_{\mathrm{GB}}=0$，从而$\angle \mathrm{AGF}=\angle \mathrm{BGF}$，这表明点F到直线GA，GB的距离相等，

故以F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切.

解法二：（I）同解法一.

（II）设以点F为圆心且与直线GA相切的圆的半径为r.

因为点$\mathrm{A}\left(2,m\right)$在抛物线$\mathrm{E}$: $y^2=4x$上，



所以$m=\pm 2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设$\mathrm{A}\left(2,2\sqrt{2}\right)$.

由$\mathrm{A}\left(2,2\sqrt{2}\right)$，$\mathrm{F}\left(1,0\right)$可得直线AF的方程为$y=2\sqrt{2}\left(x-1\right)$.

由$\begin{cases} y=2\sqrt{2}\left(x-1\right) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$2x^2-5x+2=0$，

解得$x=2$或$x=\dfrac{1}{2}$，从而$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又$\mathrm{G}\left(-1,0\right)$，故直线GA的方程为$2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$，

从而$r=\dfrac{\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{8+9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线GB的方程为$2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点F到直线GB的距离$d=\dfrac{\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{8+9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切.

20.本小题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系、锥体的体积等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想。满分 12 分。

解法一：（I）在ΔAOC中，因为$OA=OC$， D为AC的中点，

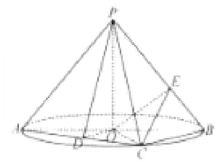
所以$AC\perp OD$.

又PO垂直于圆O所在的平面，

所以$PO\perp AC$.

因为$DO\bigcap PO=O$，

所以$AC\perp$平面PDO .



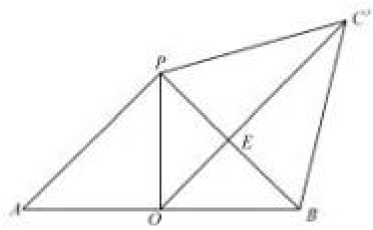
（II）因为点C在圆O上，

所以当$CO\perp AB$时， C到AB的距离最大，且最大值为1.

又$AB=2$，所以ΔABC面积的最大值为$\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$.

又因为三棱锥$P-ABC$的高$PO=1$，

故三棱锥$P-ABC$体积的最大值为$\dfrac{1}{3}\times 1\times 1=\dfrac{1}{3}$.



（III）在ΔPOB中， $PO=OB=1$，$\angle POB=90^{\circ}$，

所以$PB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

同理$PC=\sqrt{2}$，所以$PB=PC=BC$.

在三棱锥$P-ABC$中，将侧面BCP绕PB旋转至平面$BC'P$，使之与平面ABP共面，如图所示.

当O，E，C'共线时，$CE+OE$取得最小值.

又因为$OP=OB$，$C'P=C'B$，

所以 OC' 垂直平分 PB，

即 E 为 PB 中点.

从而 $OC' = OE + EC' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，

亦即 $CE + OE$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

解法二：（I）、（II）同解法一.

（III）在 ΔPOB 中，$PO = OB = 1$，$\angle POB = 90^\circ$，

所以 $\angle OPB = 45^\circ$，$PB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. 同理 $PC = \sqrt{2}$.

所以 $PB = PC = BC$，所以 $\angle CPB = 60^\circ$.

在三棱锥 $P-ABC$ 中，将侧面 BCP 绕 PB 旋转至平面 $BC'P$，使之与平面 ABP 共面，如图所示.

当 O，E，C' 共线时，$CE + OE$ 取得最小值.

所以在 $\Delta OC'P$ 中，由余弦定理得：

$$OC'^2 = 1 + 2 - 2\times 1\times\sqrt{2}\times\cos\left(45^\circ + 60^\circ\right)$$

$$= 1 + 2 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2 + \sqrt{3}.$$

从而 $OC' = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

所以 $CE + OE$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

21.本小题主要考查三角函数的图像与性质、三角恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、抽象概括能力、推理论证能力、创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化思想、有限与无限思想、数形结合思想。满分 12 分。

解：（I）因为 $f(x) = 10\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 10\cos^2\frac{x}{2}$

$$= 5\sqrt{3}\sin x + 5\cos x + 5$$

$$= 10\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5.$$

所以函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $\mathrm{T}=2\pi$.

（II）（i）将 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y=10\sin x+5$ 的图象，再向下平移 a（$a>0$）个单位长度后得到 $g\left(x\right)=10\sin x+5-a$ 的图象.

又已知函数 $g\left(x\right)$ 的最大值为 2，所以 $10+5-a=2$，解得 $a=13$.

所以 $g\left(x\right)=10\sin x-8$.

（ii）要证明存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$，就是要证明存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $10\sin x_0-8>0$，即 $\sin x_0>\dfrac{4}{5}$.

由 $\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 知，存在 $0<\alpha_0<\dfrac{\pi}{3}$，使得 $\sin\alpha_0=\dfrac{4}{5}$.

由正弦函数的性质可知，当 $x\in\left(\alpha_0,\pi-\alpha_0\right)$ 时，均有 $\sin x>\dfrac{4}{5}$.

因为 $y=\sin x$ 的周期为 2π，

所以当 $x\in\left(2k\pi+\alpha_0,2k\pi+\pi-\alpha_0\right)$（$k\in\mathrm{Z}$）时，均有 $\sin x>\dfrac{4}{5}$.

因为对任意的整数 k，$\left(2k\pi+\pi-\alpha_0\right)-\left(2k\pi+\alpha_0\right)=\pi-2\alpha_0>\dfrac{\pi}{3}>1$，

所以对任意的正整数 k，都存在正整数 $x_k\in\left(2k\pi+\alpha_0,2k\pi+\pi-\alpha_0\right)$，使得 $\sin x_k>\dfrac{4}{5}$.

亦即存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$.

22.本小题主要考查函数的单调性、倒数及其应用等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、有限与无限思想、数形结合思想。满分 14 分。

解：（I）$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-x+1=\dfrac{-x^2+x+1}{x}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$.

由 $f'\left(x\right)>0$ 得 $\begin{cases}x>0\\-x^2+x+1>0\end{cases}$ 解得 $0<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

故 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

（II）令 $\mathrm{F}(x)=f(x)-(x-1)$， $x\in(0,+\infty)$.

则有 $\mathrm{F}'(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $\mathrm{F}'(x)<0$，

所以 $\mathrm{F}(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

故当 $x>1$ 时， $\mathrm{F}(x)<\mathrm{F}(1)=0$，即当 $x>1$ 时， $f(x)<x-1$.

（III）由（II）知，当 $k=1$ 时，不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k>1$ 时，对于 $x>1$，有 $f(x)<x-1<k(x-1)$，则 $f(x)<k(x-1)$，

从而不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k<1$ 时，令 $\mathrm{G}(x)=f(x)-k(x-1)$， $x\in(0,+\infty)$，

则有 $\mathrm{G}'(x)=\dfrac{1}{x}-x+1-k=\dfrac{-x^2+(1-k)x+1}{x}$.

由 $\mathrm{G}'(x)=0$ 得， $-x^2+(1-k)x+1=0$.

解得 $x_1=\dfrac{1-k-\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}<0$， $x_2=\dfrac{1-k+\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}>1$.

当 $x\in(1,x_2)$ 时， $\mathrm{G}'(x)>0$，故 $\mathrm{G}(x)$ 在 $[1,x_2)$ 内单调递增.

从而当 $x\in(1,x_2)$ 时， $\mathrm{G}(x)>\mathrm{G}(1)=0$，即 $f(x)>k(x-1)$，

综上，k 的取值范围是 $(-\infty,1)$.