2015年普通高等学校招生全国统一考试

（福建卷）数学（理工类）

一、选择题（共10小题，每小题5分，共50分）

1．（5分）（2015•福建）若集合A={i，i2，i3，i4}（i是虚数单位），B={1，﹣1}，则A∩B等于（　　）

A．{﹣1} B．{1} C．{1，﹣1} D．∅

【分析】利用虚数单位i的运算性质化简A，然后利用交集运算得答案．

【解答】解：∵A={i，i2，i3，i4}={i，﹣1，﹣i，1}，B={1，﹣1}，

∴A∩B={i，﹣1，﹣i，1}∩{1，﹣1}={1，﹣1}．

故选：C．

2．（5分）（2015•福建）下列函数为奇函数的是（　　）

A．$y=\sqrt{x}$ B．y=|sinx| C．y=cosx D．y=ex﹣e﹣x

【分析】根据函数奇偶性的定义进行判断即可．

【解答】解：A．函数的定义域为[0，+∞），定义域关于原点不对称，故A为非奇非偶函数．

B．f（﹣x）=|sin（﹣x）|=|sinx|=f（x），则f（x）为偶函数．

C．y=cosx为偶函数．

D．f（﹣x）=e^{-x}﹣e^{x}=﹣（e^{x}﹣e^{-x}）=﹣f（x），则f（x）为奇函数，

故选：D

3．（5分）（2015•福建）若双曲线E：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$=1的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点P在双曲线E上，且|PF1|=3，则|PF2|等于（　　）

A．11 B．9 C．5 D．3

【分析】确定P在双曲线的左支上，由双曲线的定义可得结论．

【解答】解：由题意，双曲线E：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$=1中a=3．

∵$|PF1|=3$，∴P 在双曲线的左支上，

∴由双曲线的定义可得$|PF2|-|PF1|=6$，

∴$|PF2|=9$．

故选：B．

4．（5 分）（2015•福建）为了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计数据表：

收入 x（万元）	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y（万元）	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

根据上表可得回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=0.76$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，据此估计，该社区一户收入为 15 万元家庭年支出为（　　）

A．11.4 万元 B．11.8 万元 C．12.0 万元 D．12.2 万元

【分析】由题意可得$\overline{x}$和$\overline{y}$，可得回归方程，把 x=15 代入方程求得 y 值即可．

【解答】解：由题意可得$\overline{x}=\frac{1}{5}$（8.2+8.6+10.0+11.3+11.9）=10，

$\overline{y}=\frac{1}{5}$（6.2+7.5+8.0+8.5+9.8）=8，

代入回归方程可得$\hat{a}=8-0.76\times10=0.4$，

∴回归方程为$\hat{y}=0.76x+0.4$，

把 x=15 代入方程可得 $y=0.76\times15+0.4=11.8$，

故选：B．

5．（5 分）（2015•福建）若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+2y\geqslant0\\x-y\leqslant0\\x-2y+2\geqslant0\end{cases}$则 $z=2x-y$ 的最小值等于（　　）

A．$-\frac{5}{2}$ B．－2 C．$-\frac{3}{2}$ D．2

【分析】由约束条件作出可行域，由图得到最优解，求出最优解的坐标，数形结合得答案．

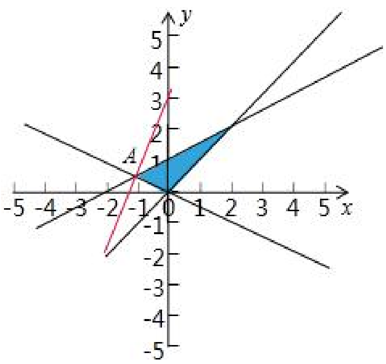
【解答】解：由约束条件$\begin{cases}x+2y\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x-2y+2\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，

由图可知，最优解为 A，

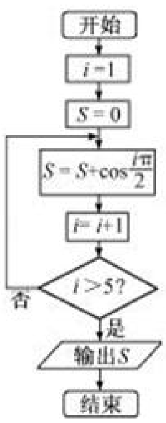
联立$\begin{cases}x+2y=0\\ x-2y+2=0\end{cases}$，解得 A（﹣1，$\frac{1}{2}$）．

∴z=2x﹣y 的最小值为 2×（﹣1）﹣$\frac{1}{2}$=$-\frac{5}{2}$．

故选：A．



6．（5 分）（2015•福建）阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为（　　）



A．2 B．1 C．0 D．﹣1

【分析】模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 i，S 的值，当 i=6 时满足条件 i＞5，退出循环，输出 S 的值为 0．

【解答】解：模拟执行程序框图，可得

i=1，S=0

S=cos$\frac{\pi}{2}$，i=2

不满足条件 i＞5，S=cos$\frac{\pi}{2}$+cosπ，i=3

不满足条件 i＞5，S=cos$\frac{\pi}{2}$+cosπ+cos$\frac{3\pi}{2}$，i=4

不满足条件 i＞5，S=cos$\frac{\pi}{2}$+cosπ+cos$\frac{3\pi}{2}$+cos2π，i=5

不满足条件 i＞5，S=cos$\frac{\pi}{2}$+cosπ+cos$\frac{3\pi}{2}$+cos2π+cos$\frac{5\pi}{2}$=0﹣1+0+1+0=0，i=6

满足条件 i＞5，退出循环，输出 S 的值为 0，

故选：C．

7．（5 分）（2015•福建）若 l，m 是两条不同的直线，m 垂直于平面α，则“l⊥m”是“l∥α”的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【分析】利用直线与平面平行与垂直关系，判断两个命题的充要条件关系即可．

【解答】解：l，m 是两条不同的直线，m 垂直于平面α，则“l⊥m”可能“l∥α”也可能 l⊂α，反之，“l∥α”一定有“l⊥m”，

所以 l，m 是两条不同的直线，m 垂直于平面α，则“l⊥m”是“l∥α”的必要而不充分条件．

故选：B．

8．（5 分）（2015•福建）若 a，b 是函数 f（x）=x^2﹣px+q（p＞0，q＞0）的两个不同的零点，且 a，b，﹣2 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 p+q 的值等于（　　）

A．6 B．7 C．8 D．9

【分析】由一元二次方程根与系数的关系得到 a+b=p，ab=q，再由 a，b，﹣2 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列列关于 a，b 的方程组，求得 a，b 后得答案．

【解答】解：由题意可得：a+b=p，ab=q，

∵p＞0，q＞0，

可得 a＞0，b＞0，

又 a，b，－2 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，

可得$\begin{cases}2b=a-2\\ab=4\end{cases}$①或$\begin{cases}2a=b-2\\ab=4\end{cases}$②.

解①得：$\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$；解②得：$\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$.

∴p=a+b=5，q=1×4=4，

则 p+q=9.

故选：D.

9．（5 分）（2015•福建）已知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{t}$，$|\overrightarrow{AC}|=t$，若 P 点是△ABC 所在平面内一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值等于（　　）

A．13 B．15 C．19 D．21

【分析】建系，由向量式的几何意义易得 P 的坐标，可化$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-(\frac{1}{t}-1)-4(t-4)=17-(\frac{1}{t}+4t)$，由基本不等式可得.

【解答】解：由题意建立如图所示的坐标系，

可得 A（0，0），B（$\frac{1}{t}$，0），C（0，t），

∵$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，∴P（1，4），

∴$\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{t}-1,-4)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,t-4)$，

∴$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-(\frac{1}{t}-1)-4(t-4)=17-(\frac{1}{t}+4t)$，

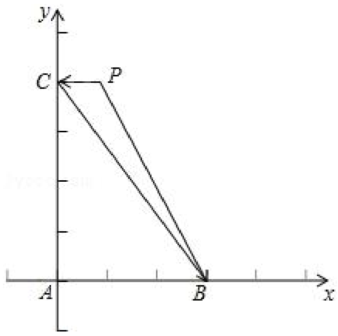
由基本不等式可得$\frac{1}{t}+4t\geq2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot4t}=4$，

$\therefore 17-(\frac{1}{t}+4t)\leq 17-4=13$，

当且仅当 $\frac{1}{t}=4t$ 即 $t=\frac{1}{2}$ 时取等号，

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值为 13，

故选：A．



10．（5 分）（2015•福建）若定义在 R 上的函数 f（x）满足 f（0）=－1，其导函数 f′（x）满足 f′（x）＞k＞1，则下列结论中一定错误的是（　　）

A．$f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k}$ B．$f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k-1}$ C．$f(\frac{1}{k-1})<\frac{1}{k-1}$ D．$f(\frac{1}{k-1})>\frac{k}{k-1}$

【分析】根据导数的概念得出 $\frac{f(x)-f(0)}{x}>k>1$，用 $x=\frac{1}{k-1}$ 代入可判断出 $f(\frac{1}{k-1})>\frac{1}{k-1}$，即可判断答案．

【解答】解；$\because f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$f'(x)>k>1$，

$\therefore \frac{f(x)-f(0)}{x}>k>1$，

即 $\frac{f(x)+1}{x}>k>1$，

当 $x=\frac{1}{k-1}$ 时，$f(\frac{1}{k-1})+1>\frac{1}{k-1}\times k=\frac{k}{k-1}$，

即 f（$\frac{1}{k-1}$）$>\frac{k}{k-1}$ - 1=$\frac{1}{k-1}$

故 f（$\frac{1}{k-1}$）$>\frac{1}{k-1}$，

所以 f（$\frac{1}{k-1}$）$<\frac{1}{k-1}$，一定出错，

故选：C．

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分

11．（4 分）（2015•福建）（x+2）5 的展开式中，x2 的系数等于　80　．（用数字作答）

【分析】先求出二项式展开式的通项公式，再令 x 的幂指数等于 2，求得 r 的值，即可求得展开式中的 x^2 项的系数．

【解答】解：（x+2）5 的展开式的通项公式为 Tr+1=C_5^r•x^{5-r}•2^r，

令 5 - r=2，求得 r=3，可得展开式中 x^2 项的系数为$C_5^3\cdot 2^3$=80，

故答案为：80．

12．（4 分）（2015•福建）若锐角△ABC 的面积为$10\sqrt{3}$，且 AB=5，AC=8，则 BC 等于　7　．

【分析】利用三角形的面积公式求出 A，再利用余弦定理求出 BC．

【解答】解：因为锐角△ABC 的面积为$10\sqrt{3}$，且 AB=5，AC=8，

所以$\frac{1}{2}\times 5\times 8\times \sin A=10\sqrt{3}$，

所以 sinA=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

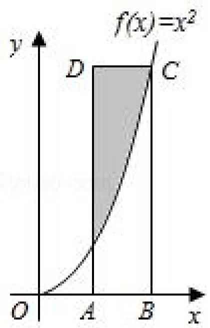
所以 A=60°，

所以 cosA=$\frac{1}{2}$，

所以 BC=$\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\frac{1}{2}}$=7．

故答案为：7．

13．（4 分）（2015•福建）如图，点 A 的坐标为（1，0），点 C 的坐标为（2，4），函数 f（x）=x^2，若在矩形 ABCD 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率等于 $\frac{5}{12}$ ．



【分析】分别求出矩形和阴影部分的面积，利用几何概型公式，解答．

【解答】解：由已知，矩形的面积为 4×（2﹣1）=4，

阴影部分的面积为 $\int_1^2(4-x^2)dx$=（4x﹣$\frac{1}{3}x^3$）$|_1^2$=$\frac{5}{3}$，

由几何概型公式可得此点取自阴影部分的概率等于$\frac{5}{12}$；

故答案为：$\frac{5}{12}$．

14．（4 分）（2015•福建）若函数 f（x）=$\begin{cases}-x+6, & x\leqslant2\\3+\log_a x, & x>2\end{cases}$（a＞0 且 a≠1）的值域是[4，+∞），则实数 a 的取值范围是 （1，2] ．

【分析】当 x≤2 时，满足 f（x）≥4．当 x＞2 时，由 f（x）=3+logax≥4，即 logax≥1，故有 loga2≥1，由此求得 a 的范围，综合可得结论．

【解答】解：由于函数 f（x）=$\begin{cases}-x+6, & x\leqslant2\\3+\log_a x, & x>2\end{cases}$（a＞0 且 a≠1）的值域是[4，+∞），

故当 x≤2 时，满足 f（x）=6﹣x≥4．

当 x＞2 时，由 f（x）=3+logax≥4，∴logax≥1，∴loga2≥1，∴1＜a≤2．

综上可得，1＜a≤2，

故答案为：（1，2]．

15．（4 分）（2015•福建）一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1x_2\cdots x_n(n\in N^*)$，其中 x_k（k=1，2，…，n）称为第 k 位码元，二元码是通信中常用的码，但在通信过程中有时会发生码元错误（即码元由 0 变为 1，或者由 1 变为 0）

已知某种二元码 $x_1x_2\ldots x_7$ 的码元满足如下校验方程组：$\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=0\\x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0\\x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=0\end{cases}$

其中运算⊕定义为：0⊕0=0，0⊕1=1，1⊕0=1，1⊕1=0．

现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101，那么利用上述校验方程组可判定 k 等于　5　．

【分析】根据二元码 $x_1x_2\ldots x_7$ 的码元满足的方程组，及“⊕”的运算规则，将 k 的值从 1 至 7 逐个验证即可．

【解答】解：依题意，二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101，

①若 k=1，则 x1=0，x2=1，x3=0，x4=1，x5=1，x6=0，x7=1，

从而由校验方程组，得 x_4⊕x5⊕x6⊕x7=1，故 k≠1；

②若 k=2，则 x1=1，x2=0，x3=0，x4=1，x5=1，x6=0，x7=1，

从而由校验方程组，得 x_2⊕x3⊕x6⊕x7=1，故 k≠2；

③若 k=3，则 x1=1，x2=1，x3=1，x4=1，x5=1，x6=0，x7=1，

从而由校验方程组，得 x_2⊕x3⊕x6⊕x7=1，故 k≠3；

④若 k=4，则 x1=1，x2=1，x3=0，x4=0，x5=1，x6=0，x7=1，

从而由校验方程组，得 x_1⊕x3⊕x5⊕x7=1，故 k≠4；

⑤若 k=5，则 x1=1，x2=1，x3=0，x4=1，x5=0，x6=0，x7=1，

从而由校验方程组，得 x_4⊕x5⊕x6⊕x7=0，x2⊕x3⊕x6⊕x7=0，x1⊕x3⊕x5⊕x7=0，

故 k=5 符合题意；

⑥若 $k=6$，则 $x1=1$，$x2=1$，$x3=0$，$x4=1$，$x5=1$，$x6=1$，$x7=1$，

从而由校验方程组，得 $x_2 \oplus x3 \oplus x6 \oplus x7=1$，故 $k\neq 6$；

⑦若 $k=7$，则 $x1=1$，$x2=1$，$x3=0$，$x4=1$，$x5=1$，$x6=0$，$x7=0$，

从而由校验方程组，得 $x_2 \oplus x3 \oplus x6 \oplus x7=1$，故 $k\neq 7$；

综上，k 等于 5．

故答案为：5．

三、解答题

16．（13 分）（2015•福建）某银行规定，一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误，该银行卡将被锁定，小王到银行取钱时，发现自己忘记了银行卡的密码，但是可以确定该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一，小王决定从中不重复地随机选择 1 个进行尝试．若密码正确，则结束尝试；否则继续尝试，直至该银行卡被锁定．

（1）求当天小王的该银行卡被锁定的概率；

（2）设当天小王用该银行卡尝试密码次数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

【分析】（1）根据概率的公式即可求当天小王的该银行卡被锁定的概率；

（2）随机变量 X 的取值为：1，2，3，分别求出对应的概率，即可求出分布列和期望．

【解答】解：（1）设“当天小王的该银行卡被锁定”的事件为 A，

则 $P(A)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$．

（2）有可能的取值是 1，2，3

又则 $P(X=1)=\frac{1}{6}$，

$P(X=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$，

$P(X=3)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{3}$，

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3

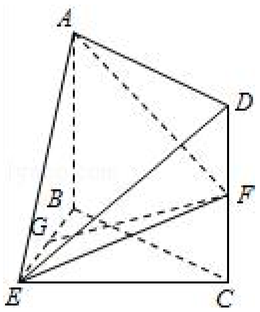
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

$EX=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$.

17. （13分）（2015•福建）如图，在几何体ABCDE中，四边形ABCD是矩形，AB⊥平面BEC，BE⊥EC，AB=BE=EC=2，G，F分别是线段BE，DC的中点.

（1）求证：GF∥平面ADE；

（2）求平面AEF与平面BEC所成锐二面角的余弦值.



【分析】解法一：（1）取AE的中点H，连接HG，HD，通过证明四边形HGFD是平行四边形来证明GF∥DH，由线面平行的判定定理可得；

（2）以B为原点，分别以$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BQ}$，$\overrightarrow{BA}$的方向为x轴，y轴，z轴的正方向建立空间直角坐标系，可得平面BEC和平面AEF的法向量，由向量夹角的余弦值可得.

解法二：（1）如图，取AB中点M，连接MG，MF，通过证明平面GMF∥平面ADE来证明GF∥平面ADE；（2）同解法一.

【解答】解法一：（1）如图，取AE的中点H，连接HG，HD，

∵G是BE的中点，∴GH∥AB，且GH=$\frac{1}{2}$AB，

又∵F是CD中点，四边形ABCD是矩形，

∴DF∥AB，且DF=$\frac{1}{2}$AB，即GH∥DF，且GH=DF，

∴四边形HGFD是平行四边形，∴GF∥DH，

又∵DH⊂平面ADE，GF⊄ 平面ADE，∴GF∥平面ADE.

（2）如图，在平面BEG内，过点B作BQ∥CE，

∵BE⊥EC，∴BQ⊥BE，

又∵AB⊥平面 BEC，∴AB⊥BE，AB⊥BQ，

以 B 为原点，分别以$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BQ}$，$\overrightarrow{BA}$的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

则 A（0，0，2），B（0，0，0），E（2，0，0），F（2，2，1）

∵AB⊥平面 BEC，∴$\overrightarrow{BA}=(0,\ 0,\ 2)$为平面 BEC 的法向量，

设$\overrightarrow{n}$=（x，y，z）为平面 AEF 的法向量．又$\overrightarrow{AE}$=（2，0，－2），$\overrightarrow{AF}$=（2，2，－1）

由垂直关系可得$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2x-2z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2x+2y-z=0\end{cases}$，取 z=2 可得$\overrightarrow{n}=(2,\ -1,\ 2)$.

∴cos＜$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{BA}$＞=$\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{BA}|}$=$\dfrac{2}{3}$

∴平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

解法二：（1）如图，取 AB 中点 M，连接 MG，MF，

又 G 是 BE 的中点，可知 GM∥AE，且 GM=$\dfrac{1}{2}$AE

又 AE⊂平面 ADE，GM⊄ 平面 ADE，

∴GM∥平面 ADE.

在矩形 ABCD 中，由 M，F 分别是 AB，CD 的中点可得 MF∥AD.

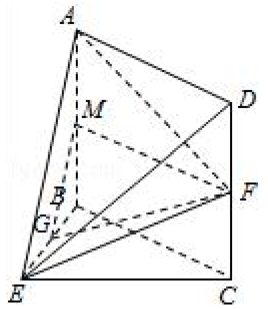
又 AD⊂平面 ADE，MF⊄ 平面 ADE，∴MF∥平面 ADE.

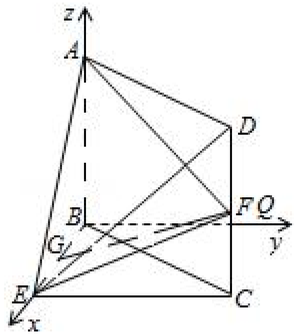
又∵GM∩MF=M，GM⊂平面 GMF，MF⊂平面 GMF

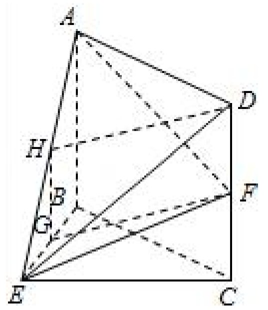
∴平面 GMF∥平面 ADE，

∵GF⊂平面 GMF，∴GF∥平面 ADE

（2）同解法一.



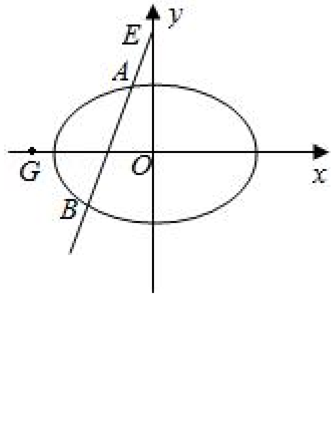




18．（13 分）（2015•福建）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）过点$(0,\sqrt{2})$，且离心率 e 为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设直线 x=my﹣1（m∈R）交椭圆 E 于 A，B 两点，判断点 G$\left(-\frac{9}{4},0\right)$与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由．



【分析】解法一：（1）由已知得$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得即可得出椭圆 E 的方程．

（2）设点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），AB 中点为 H（x_0，y_0）．直线方程与椭圆方程联立化为（m^2+2）y2﹣2my﹣3=0，利用根与系数的关系中点坐标公式可得：y0=$\frac{m}{m^2+2}$.|GH|2=$(x_0+\frac{9}{4})^2+y_0^2$．$\frac{|AB|^2}{4}$=$\frac{(m^2+1)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}{4}$，作差|GH|2﹣$\frac{|AB|^2}{4}$即可判断出．

解法二：（1）同解法一．

（2）设点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则$\overrightarrow{GA}$=$(x_1+\frac{9}{4},\ y_1)$，$\overrightarrow{GB}$=$(x_2+\frac{9}{4},\ y_2)$．直线方程与椭圆方程联立化为（m^2+2）y2﹣2my﹣3=0，计算$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$=$(x_1+\frac{9}{4})(x_2+\frac{9}{4})+y_1y_2$即可得出∠AGB，进而判断出位置关系．

【解答】解法一：（1）由已知得$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=c=\sqrt{2}\end{cases}$，

∴椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）设点 A（x_1y_1），B（x_2，y_2），AB 中点为 H（x_0，y_0）．

由$\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，化为（$m^2+2$）y2﹣2my﹣3=0，

∴y1+y2=$\frac{2m}{m^2+2}$，y_1y_2=$\frac{-3}{m^2+2}$，∴y0=$\frac{m}{m^2+2}$．

G$(-\frac{9}{4},\ 0)$，

∴|GH|2=$(x_0+\frac{9}{4})^2+y_0^2$=$(my_0+\frac{5}{4})^2$+$y_0^2$=$(m^2+1)y_0^2$+$\frac{5}{2}my_0$+$\frac{25}{16}$．

$\frac{|AB|^2}{4}$=$\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}$=$\frac{(m^2+1)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}{4}$=$(m^2+1)(y_0^2-y_1y_2)$，

故$|GH|^2-\frac{|AB|^2}{4}=\frac{5}{2}my_0+(m^2+1)y_1y_2+\frac{25}{16}=\frac{5m^2}{2(m^2+2)}-\frac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\frac{25}{16}=\frac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$.

∴$|GH|>\frac{|AB|}{2}$，故 G 在以 AB 为直径的圆外.

解法二：（1）同解法一.

（2）设点 A（x_1y_1），B（x_2，y_2），则$\overrightarrow{GA}=(x_1+\frac{9}{4}, y_1)$，$\overrightarrow{GB}=(x_2+\frac{9}{4}, y_2)$.

由$\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，化为（$m^2+2$）$y^2-2my-3=0$，

∴$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+2}$，

从而$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=(x_1+\frac{9}{4})(x_2+\frac{9}{4})+y_1y_2$

$=(my_1+\frac{5}{4})(my_2+\frac{5}{4})+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+\frac{5}{4}m(y_1+y_2)+\frac{25}{16}$

$=\frac{5m^2}{2(m^2+2)}-\frac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\frac{25}{16}=\frac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$.

∴$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}>0$，又$\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}$不共线，

∴∠AGB 为锐角.

故点 G$(-\frac{9}{4}, 0)$在以 AB 为直径的圆外.

19．（13 分）（2015•福建）已知函数 f（x）的图象是由函数 g（x）=cosx 的图象经如下变换得到：先将 g（x）图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变，再将所得到的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度.

（1）求函数 f（x）的解析式，并求其图象的对称轴方程；

（2）已知关于 x 的方程 f（x）+g（x）=m 在[0，2π）内有两个不同的解α，β

（i）求实数 m 的取值范围；

（ii）证明：cos（α - β）= $\frac{2m^2}{5}$ - 1.

【分析】（1）由函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换规律可得：f（x）=2sinx，从而可求对称轴方程.

（2）（i）由三角函数中的恒等变换应用化简解析式可得 f（x）+g（x）=$\sqrt{5}$sin（x+φ）（其中 sinφ=$\frac{1}{\sqrt{5}}$，cosφ=$\frac{2}{\sqrt{5}}$），从而可求$|\frac{m}{\sqrt{5}}|<1$，即可得解.

（ii）由题意可得 sin（α+φ）=$\frac{m}{\sqrt{5}}$，sin（β+φ）=$\frac{m}{\sqrt{5}}$．当 1≤m<$\sqrt{5}$时，可求α - β=π - 2（β+φ），当 - $\sqrt{5}$<m<0 时，可求α - β=3π - 2（β+φ），由 cos（α - β）=2sin2（β+φ） - 1，从而得证.

【解答】解：（1）将 g（x）=cosx 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变）得到 y=2cosx 的图象，再将 y=2cosx 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到 y=2cos（x - $\frac{\pi}{2}$）的图象，故 f（x）=2sinx，

从而函数 f（x）=2sinx 图象的对称轴方程为 x=k$\pi+\frac{\pi}{2}$（k∈Z）.

（2）（i）f（x）+g（x）=2sinx+cosx=$\sqrt{5}$（$\frac{2}{\sqrt{5}}$sinx+$\frac{1}{\sqrt{5}}$cosx）=$\sqrt{5}$sin（x+φ）（其中 sinφ=$\frac{1}{\sqrt{5}}$，cosφ=$\frac{2}{\sqrt{5}}$）

依题意，sin（x+φ）=$\frac{m}{\sqrt{5}}$在区间[0，2π）内有两个不同的解α，β，当且仅当$|\frac{m}{\sqrt{5}}|<1$，故 m 的取值范围是（ - $\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$）.

（ii）因为α，β是方程$\sqrt{5}$sin（x+φ）=m 在区间[0，2π）内的两个不同的解，

所以 sin（α+φ）=$\frac{m}{\sqrt{5}}$，sin（β+φ）=$\frac{m}{\sqrt{5}}$.

当 1≤m<$\sqrt{5}$时，α+β=2（$\frac{\pi}{2}$ - φ），即α - β=π - 2（β+φ）；

当 - $\sqrt{5}$<m<1 时，α+β=2（$\frac{3\pi}{2}$ - φ），即α - β=3π - 2（β+φ）；

所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\cos2(\beta+\varphi)=2\sin^2(\beta+\varphi)-1=2\left(\frac{m}{\sqrt{5}}\right)^2-1=\frac{2m^2}{5}-1$.

20. （7 分）（2015•福建）已知函数 f（x）=ln（1+x），g（x）=kx，（k∈R）

（1）证明：当 x＞0 时，f（x）＜x；

（2）证明：当 k＜1 时，存在 x0＞0，使得对任意 x∈（0，x0），恒有 f（x）＞g（x）；

（3）确定 k 的所有可能取值，使得存在 t＞0，对任意的 x∈（0，t），恒有|f（x）﹣g（x）|＜x2．

【分析】（1）令 F（x）=f（x）﹣x=ln（1+x）﹣x，x＞0，求导得到 F′（x）＜0，说明 F（x）在（0，+∞）上单调递减，则 x＞0 时，f（x）＜x；

（2）令 G（x）=f（x）﹣g（x）=ln（1+x）﹣kx，x∈（0，+∞），可得 k≤0 时，G′（x）＞0，说明 G（x）在（0，+∞）上单调递增，存在 x0＞0，使得对任意 x∈（0，x0），恒有 f（x）＞g（x）；当 0＜k＜1 时，由 G′（x）=0，求得 $x=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1>0$．取 $x_0=\frac{1}{k}-1$，对任意 x∈（0，x_0），恒有 G′（x）＞0，G（x）在上单调递增，G（x）＞G（0）=0，即 f（x）＞g（x）；

（3）分 k＞1、k＜1 和 k=1 把不等式|f（x）﹣g（x）|＜x2 的左边去绝对值，当 k＞1 时，利用导数求得|f（x）﹣g（x）|＞x2，满足题意的 t 不存在．

当 k＜1 时，由（2）知存在 x0＞0，使得对任意的任意 x∈（0，x0），f（x）＞g（x）．令 N（x）=ln（1+x）﹣kx﹣x2，x∈[0，+∞），求导数分析满足题意的 t 不存在．当 k=1，由（1）知，当 x∈（0，+∞）时，|f（x）﹣g（x）|=g（x）﹣f（x）=x﹣ln（1+x），令 H（x）=x﹣ln（1+x）﹣x2，x∈[0，+∞），则有 x＞0，H′（x）＜0，H（x）在[0，+∞）上单调递减，故 H（x）＜H（0）=0，说明当 x＞0 时，恒有|f（x）﹣g（x）|＜x2，此时，满足 t＞0 的实数 t 存在．

【解答】（1）证明：令 F（x）=f（x）﹣x=ln（1+x）﹣x，x＞0，

则有 $F'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$，

∵x＞0，

∴F′（x）＜0，

∴F（x）在（0，+∞）上单调递减，

∴F（x）＜F（0）=0，

∴x＞0 时，f（x）＜x；

（2）证明：令 G（x）=f（x）﹣g（x）=ln（1+x）﹣kx，x∈（0，+∞），

则有 $G'(x)=\frac{1}{x+1}-k=\frac{-kx+(1-k)}{x+1}$，

当 $k\le 0$ 时，$G'(x)>0$，

∴$G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∴$G(x)>G(0)=0$，

故对任意正实数 x_0 均满足题意.

当 $0<k<1$ 时，令 $G'(x)=0$，得 $x=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1>0$.

取 $x_0=\frac{1}{k}-1$，对任意 $x\in(0,x_0)$，恒有 $G'(x)>0$，∴$G(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，$G(x)>G(0)=0$，即 $f(x)>g(x)$.

综上，当 $k<1$ 时，总存在 $x_0>0$，使得对任意的 $x\in(0,x_0)$，恒有 $f(x)>g(x)$；

（3）解：当 $k>1$ 时，由（1）知，对于任意 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)>x>f(x)$，故 $g(x)>f(x)$，

$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=kx-\ln(1+x)$，

令 $M(x)=kx-\ln(1+x)-x^2$，$x\in(0,+\infty)$，则有 $M'(x)=k-\frac{1}{1+x}-2x=\frac{-2x^2+(k-2)x+k-1}{1+x}$，

故当 $x\in\left(0,\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+8(k-1)}}{4}\right)$ 时，$M'(x)>0$，$M(x)$ 在 $\left[0,\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+8(k-1)}}{4}\right)$ 上单调递增，

故 $M(x)>M(0)=0$，即 $|f(x)-g(x)|>x^2$，∴满足题意的 t 不存在.

当 $k<1$ 时，由（2）知存在 $x_0>0$，使得对任意的任意 $x\in(0,x_0)$，$f(x)>g(x)$.

此时 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)=\ln(1+x)-kx$，

令 $N(x)=\ln(1+x)-kx-x^2$，$x\in[0,+\infty)$，则有 $N'(x)=\frac{1}{1+x}-k-2x=\frac{-2x^2-(k+2)x-k+1}{1+x}$，

故当 $x\in\left(0,\frac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}\right)$ 时，$N'(x)>0$，$M(x)$ 在 $\left[0,\frac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}\right)$ 上单调递增，故 $N(x)>N(0)=0$，

即 f（x）﹣g（x）＞x2，记 x0 与 $\frac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}$ 中较小的为 x_1，

则当 x∈（0，x_1）时，恒有|f（x）﹣g（x）|＞x2，故满足题意的 t 不存在．

当 k=1，由（1）知，当 x∈（0，+∞）时，|f（x）﹣g（x）|=g（x）﹣f（x）=x﹣ln（1+x），

令 H（x）=x﹣ln（1+x）﹣x2，x∈[0，+∞），则有 $H'(x)=1-\frac{1}{1+x}-2x=\frac{-2x^2-x}{1+x}$，

当 x＞0，H′（x）＜0，∴H（x）在[0，+∞）上单调递减，故 H（x）＜H（0）=0，

故当 x＞0 时，恒有|f（x）﹣g（x）|＜x2，满足 t＞0 的实数 t 存在．

综上，k=1．

四、选修 4-2：矩阵与变换

21．（7 分）（2015•福建）已知矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$

（1）求 A 的逆矩阵 A^{-1}；

（2）求矩阵 C，使得 AC=B．

【分析】（1）求出矩阵的行列式，即可求 A 的逆矩阵 A^{-1}；

（2）由 AC=B 得（A^{-1}A）C=A^{-1}B，即可求矩阵 C，使得 AC=B．

【解答】解：（1）因为|A|=2×3﹣1×4=2，

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{-4}{2}&\frac{2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-2&1\end{pmatrix}$；

（2）由 AC=B 得（A^{-1}A）C=A^{-1}B，

故 $C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&2\\-2&-3\end{pmatrix}$．

五、选修 4-4：坐标系与参数方程

22.（7 分）（2015•福建）在平面直角坐标系 xoy 中，圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos t\\y=-2+3\sin t\end{cases}$（t 为参数）. 在极坐标系（与平面直角坐标系 xoy 取相同的长度单位，且以原点 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴），直线 l 的方程为$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=m$，（m∈R）

（1）求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程；

（2）设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2，求 m 的值.

【分析】（1）直接利用极坐标与直角坐标的互化以及参数方程与普通方程的互化求解即可.

（2）直接利用点到直线的距离个数求解即可.

【解答】解：（1）消去参数 t，得到圆的普通方程为$(x-1)^2+(y+2)2=9$，

由$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=m$，得$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta-m=0$，

所以直线 l 的直角坐标方程为：$x-y+m=0$.

（2）依题意，圆心 C（1，﹣2）到直线 l：$x-y+m=0$ 的距离等于 2，即$\frac{|1-(-2)+m|}{\sqrt{2}}=2$，解得 $m=-3\pm2\sqrt{2}$.

六、选修 4-5：不等式选讲

23. （7 分）（2015•福建）已知 a＞0，b＞0，c＞0，函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c$ 的最小值为 4.

（1）求 a+b+c 的值；

（2）求$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c2$ 的最小值.

【分析】（1）运用绝对值不等式的性质，注意等号成立的条件，即可求得最小值；

（2）运用柯西不等式，注意等号成立的条件，即可得到最小值.

【解答】解：（1）因为 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c\geq|(x+a)-(x-b)|+c=|a+b|+c$，

当且仅当 $-a\leq x\leq b$ 时，等号成立，

又 a＞0，b＞0，所以$|a+b|=a+b$，

所以 f（x）的最小值为 a+b+c，

所以 a+b+c=4；

（2）由（1）知 a+b+c=4，由柯西不等式得，

（$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c2$）（4+9+1）≥（$\frac{a}{2}\cdot 2+\frac{b}{3}\cdot 3+c\cdot 1$）2=（a+b+c）2=16，

即 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c2\geq\frac{8}{7}$

当且仅当 $\frac{\frac{1}{2}a}{2}=\frac{\frac{1}{3}b}{3}=\frac{c}{1}$，即 $a=\frac{8}{7}$，$b=\frac{18}{7}$，$c=\frac{2}{7}$ 时，等号成立．

所以 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c2$ 的最小值为 $\frac{8}{7}$．