

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数 学（理工类）

第 I 卷（选择题共 50 分）

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、若集合 $A = \{i, i^2, i^3, i^4\}$ (i 是虚数单位)， $B = \{1, -1\}$ ，则 $A \cap B$ 等于

A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, -1\}$ D. \emptyset

2、下列函数为奇函数的是

A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = |\sin x|$ C. $y = \cos x$ D. $y = e^x - e^{-x}$

3、若双曲线 $E: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在双曲线 E 上，且 $|PF_1| = 3$ ，则 $|PF_2|$

等于

A. 11 B. 9 C. 5 D. 3

4、为了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计数据表：

收入 x (万元)	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y (万元)	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

根据上表可得回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，其中 $\hat{b} = 0.76, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ ，据此估计，该社区一户年收入为 15 万元家庭年支出为

A. 11.4 万元 B. 11.8 万元 C. 12.0 万元 D. 12.2 万元

5、若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 0, \\ x - y \leq 0, \\ x - 2y + 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最小值等于

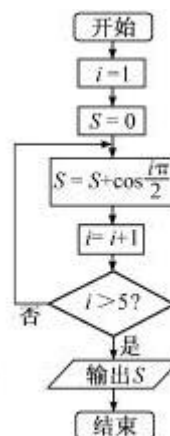
A. $-\frac{5}{2}$ B. -2 C. $-\frac{3}{2}$ D. 2

6、阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

7、若 l, m 是两条不同的直线， m 垂直于平面 α ，则“ $l \perp m$ ”是“ $l // \alpha$ ”的

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



8、若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q (p > 0, q > 0)$ 的两个不同的零点，且 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q$ 的值等于

A.6 B.7 C.8 D.9

9、已知 $\overline{AB} \perp \overline{AC}, |\overline{AB}| = \frac{1}{t}, |\overline{AC}| = t$ ，若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{4\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$ ，

则 $\overline{PB} \cdot \overline{PC}$ 的最大值等于

A.13 B.15 C.19 D.21

10、若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -1$ ，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > k > 1$ ，则下列结论中一定错误的是

A. $f\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ B. $f\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k-1}$ C. $f\left(\frac{1}{k-1}\right) < \frac{1}{k-1}$ D. $f\left(\frac{1}{k-1}\right) > \frac{k}{k-1}$

第 II 卷（非选择题共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在答题卡的相应位置.

11、 $(x+2)^5$ 的展开式中， x^2 的系数等于_____。（用数字作答）

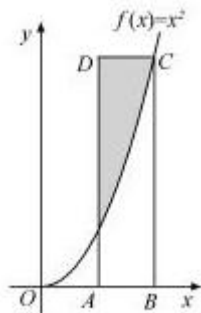
12、若锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$ ，且 $AB = 5, AC = 8$ ，则 BC 等于_____.

13、如图，点 A 的坐标为 $(1,0)$ ，点 C 的坐标为 $(2,4)$ ，函数 $f(x) = x^2$ ，若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率等于_____.

14、若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2, \\ 3+\log_a x, & x > 2, \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $[4, +\infty)$ ，

则实数 a 的取值范围是_____.

15、一个二进制码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1 x_2 \cdots x_n (n \in N^*)$ ，其中 $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 称为第 k 位码元，二进制码是通信中常用的码，但在通信过程中有时会发生码元错误（即码元由 0 变为 1，或者由 1 变为 0）



已知某种二进制码 $x_1 x_2 \cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组：

$$\begin{cases} x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0, \end{cases}$$

其中运算 \oplus 定义为： $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$.

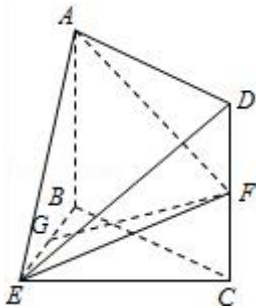
现已知一个这种二进制码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101，那么利用上述校验方程组可判定 k 等于_____.

16. 某银行规定，一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误，该银行卡将被锁定，小王到银行取钱时，发现自己忘记了银行卡的密码，但是可以确定该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一，小王决定从中不重复地随机选择 1 个进行尝试. 若密码正确，则结束尝试；否则继续尝试，直至该银行卡被锁定.

(I) 求当天小王的该银行卡被锁定的概率；

(II) 设当天小王用该银行卡尝试密码次数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

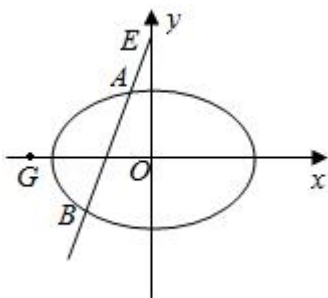
17. 如图，在几何体 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB \perp$ 平面 BEG ， $BE \perp EC$ ， $AB=BE=EC=2$ ， G, F 分别是线段 BE, DC 的中点.



(I) 求证： $GF \parallel$ 平面 ADE

(II) 求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.

18. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ ，且离心率为 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 设直线 $l: x = my - 1, (m \in R)$ 交椭圆 E 于 A, B 两点，判断点 $G(-\frac{9}{4}, 0)$

与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.

19. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x) = \cos x$ 的图像经如下变换得到: 先将 $g(x)$ 图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图像向右平移 $\frac{p}{2}$ 个单位长度.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求其图像的对称轴方程;

(II) 已知关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2p)$ 内有两个不同的解 a, b

(i) 求实数 m 的取值范围;

(ii) 证明: $\cos(a - b) = \frac{2m^2}{5} - 1$.

20. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = kx, (k \in \mathbb{R})$,

(I) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$;

(II) 证明: 当 $k < 1$ 时, 存在 $x_0 > 0$, 使得对任意 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $f(x) > g(x)$;

(III) 确定 k 的所有可能取值, 使得存在 $t > 0$, 对任意的 $x \in (0, t)$, 恒有 $|f(x) - g(x)| < x^2$.

21. 本题设有 (1)、(2)、(3) 三个选考题, 每题 7 分, 请考生任选 2 题作答. 满分 14 分, 如果多做, 则按所做的前两题计分. 作答时, 先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右边的方框涂黑, 并将所选题号填入括号中.

(1) (本小题满分 7 分) 选修 4-2: 矩阵与变换

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(I) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;

(II) 求矩阵 C , 使得 $AC=B$.

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=-2+3\sin t \end{cases}$. 在极坐标系 (与平面直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴非负半轴为极轴) 中, 直线 l 的方程为

$$\sqrt{2}\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = m, \quad (m \in \mathbb{R})$$

(I)求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;

(II)设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2, 求 m 的值.

(3) (本小题 7 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $a>0, b>0, c>0$, 函数 $f(x) = |x+a| + |x+b| + c$ 的最小值为 4.

(I)求 $a+b+c$ 的值;

(II)求 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + c^2$ 的最小值为.