2015年高考数学（湖南卷）文科解析

1.**解析** 由题意得，$z=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$.故选 D.

2.**解析** 由茎叶图可知，在区间$[139,151]$的人数为20，再由系统抽样的性质可知人数为

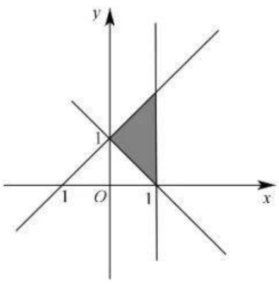
$20\times\dfrac{7}{35}=4$ 人.故选 B.

3.**解析** 因为由 $x>1$ 可推出 $x^3>1$，而由 $x^3>1$ 可推出 $x>1$，所以“$x>1$”是“$x^2>1$”的充要条件.故选 C.

4.**解析** 由约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ y-x\leqslant 1\\ x\leqslant 1\end{cases}$作出可行域如图所示，由图可知，当直线 $y=2x-z$ 过点 A 时，纵截距最大，

即此时 z 有最小值. 联立$\begin{cases}x+y=1\\ y-x=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$，即 $A\left(0,1\right)$，

所以 $z_{\min}=2\times 0-1=-1$.故选 A.



5.**解析** 由题意，输出的 S 为数列$\left\{\dfrac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}\right\}$的前3项和，

即 $S_3=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{1}{\left(2i-1\right)\left(2i+1\right)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\dfrac{1}{2i-1}-\dfrac{1}{2i+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{3}{7}$.故选 B.

6.**解析** 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的渐近线为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，由已知渐近线经过点$\left(3,-4\right)$，

所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{5}{3}$. 故选 D.

7.**解析** 由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\sqrt{ab}$ 可知 $a>0,b>0$． 由基本不等式可得

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{2}{ab}}$. 所以$\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，解得$ab\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当$b=2a$时取等号，即$ab$的最小值为$2\sqrt{2}$. 故选 C.

8.**解析** 由已知$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-1,1\right)$，关于原点对称.
又因为$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数.
$f'\left(x\right)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$，当$x\in\left(0,1\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，即$f(x)$在$\left(0,1\right)$上为增函数.故选 A.

9.**解析** **解法一：**由题意，AC为直径，所以$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=\left|2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\right|\leqslant 2\left|\overrightarrow{PO}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|$，当点$B$为$\left(-1,0\right)$时，$\left|4+\overrightarrow{PB}\right|$取得最大值7.故选 B.

解法二：由题意得，AC为圆的直径，故可设$A\left(m,n\right),C\left(-m,-n\right),B\left(x,y\right)$，
所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\left(x-6,y\right)$，而$\left(x-6\right)^2+y^2=x^2+y^2-12x+36=37-12x\leqslant 49$，
当且仅当“$x=-1$”时“=”，取所以$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$的最大值为7.故选 B.

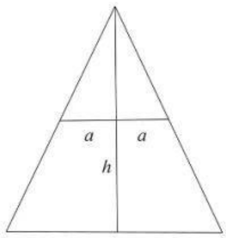
10.**解析** 问题等价于圆锥的内接长方体的体积的最大值.设长方体的长、宽、高分别为x,y,h，长方体上底面截圆锥到截面半径为a，则$x^2+y^2=\left(2a\right)^2=4a^2$，如图所示.

由图可知$\frac{a}{1}=\frac{2-h}{2}$，所以$h=2-2a$，而长方体

$$V=xyh\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\cdot h=2a^2h=2a^2\left(2-2a\right)\leqslant 2\times\left(\frac{a+a+2-2a}{3}\right)^3=\frac{16}{27}.$$

当且仅当$x=y,a=2-2a$，即$a=\frac{2}{3}$时等号成立，

此时利用率为$\frac{\frac{16}{27}}{\frac{1}{3}\pi\times 1^2\times 2}=\frac{8}{9\pi}$.故选 A.

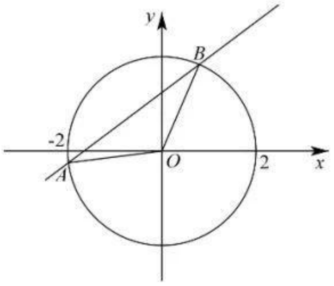


11.**解析** 因为$\complement_U B=\left\{2\right\}$，所以$A\cup\complement_U B=\left\{1,2,3\right\}$.

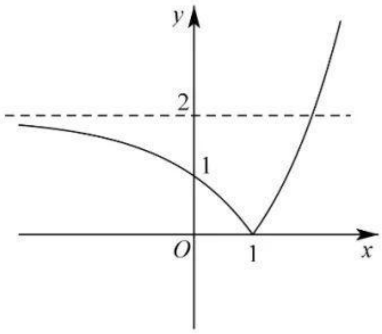
12.**解析** 曲线C的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$，$\rho^2=2\rho\sin\theta$，它的直角坐标方程为$x^2+y^2=2y$，即$x^2+\left(y-1\right)^2=1$.

13. **解析** 如图所示，直线$3x-4y+5=0$与圆$x^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$交于$A,B$两点，$O$为坐标原点，且$\angle AOB=120^\circ$，则圆心$\left(0,0\right)$到直线$3x-4y+5=0$的距离为$\frac{1}{2}r$，

$\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}r$，所以$r=2$.



14.解析　由函数 $f(x)=\left|2^x-2\right|-b$ 有两个零点，从而可得函数 $y=\left|2^x-2\right|$ 与函数 $y=b$ 的图像有两个交点，函数 $y=\left|2^x-2\right|$ 的图像如图所示，结合函数的图像可得，当 $0<b<2$ 时符合条件.



15.解析　令 $2\sin\omega x=2\cos\omega x$，解得 $x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}$ 和 $x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$2\sin\omega\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\right)=\sqrt{2}$，$2\sin\omega\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}\right)=-\sqrt{2}$，

所以交点的坐标为 $\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega},\sqrt{2}\right)$，$\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega},-\sqrt{2}\right)$. $k\in\mathbf{Z}$.

距离最短的两个交点一定在同一个周期内，

所以 $\left[\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}\right)-\left(\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\right)\right]^2+\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$，解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$.

16. 解析　(1) 所有可能的摸出结果是：$\{A_1,a_1\},\{A_1,a_2\},\{A_1,b_1\},\{A_1,b_2\},\{A_2,a_1\}$,

$\{A_2,a_2\},\{A_2,b_1\},\{A_2,b_2\},\{B,a_1\},\{B,a_2\},\{B,b_1\},\{B,b_2\}$.

(2) 不正确，理由如下：

由 (1) 知，所有可能的摸出结果共 12 种，其中摸出的 2 个球都是红球的结果为

$\{A_1,a_1\},\{A_1,a_2\},\{A_2,a_1\},\{A_2,a_2\}$，共 4 种，所以中奖的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，不中奖的概率为 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$，故这种说法不正确.

17. 解析　(1) 由 $a=b\tan A$ 及正弦定理，得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，所以 $\sin B=\cos A$.

（2）因为$\sin C-\sin A\cos B=\sin\left[180°-\left(A+B\right)\right]-\sin A\cos B$

$=\sin\left(A+B\right)-\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B=\cos A\sin B$

所以 $\cos A\sin B=\frac{3}{4}$.

由（1）知$\sin B=\cos A$，因此$\sin^2 B=\frac{3}{4}$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$B$为钝角，

故$B=120°$，由$\cos A=\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$知$A=30°$，从而$C=180°-\left(A+B\right)=30°$，

综上所述，$A=30°$，$B=120°$，$C=30°$.

18. **解析** （1）如图所示，因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，

所以$AE\perp BB_1$，又E是正三角形ABC的边BC的中点，

所以$AE\perp BC$，因此$AE\perp$平面B_1BCC_1，又$AE\subset$平面AEF，

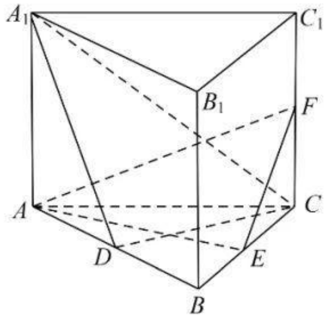
所以平面$AEF\perp$平面B_1BCC_1.

（2）设AB的中点为D，连接A_1D,CD，因为$\triangle ABC$是正三角形，所以$CD\perp AB$，又三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，所以$CD\perp AA_1$，因此$CD\perp$平面A_1ABB_1，于是$\angle CA_1D$为直线A_1C与平面A_1ABB_1所成的角，由题设, $\angle CA_1D=45°$，

所以$A_1D=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AA_1D$中，$AA_1=\sqrt{A_1D^2-AD^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，所以$FC=\frac{1}{2}AA_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故三棱锥$F-AEC$的体积$V=\frac{1}{3}S_{\triangle AEC}\times FC=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{12}$.



19. **解析** （1）由条件，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$，

因而对任意 $n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$，有 $a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3$，

两式相减，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=3a_n-a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=3a_n\left(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，

又 $a_1=1,a_2=2$，所以 $a_3=3S_1-S_2+3=3a_1-\left(a_1+a_2\right)+3=3=3a_1$，

故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+2}=3a_n$.

（2）由（1）知，$a_n\neq 0$，所以 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=3$，于是数列 $\left\{a_{2n-1}\right\}$ 是首项 $a_1=1$，公比为3的等比数列，数列 $\left\{a_{2n}\right\}$ 是首项 $a_2=2$，公比为3的等比数列，所以 $a_{2n-1}=3^{n-1},a_{2n}=2\times 3^{n-1}$，于是

$S_{2n}=a_1+a_2+...+a_{2n}=\left(a_1+a_3+...+a_{2n-1}\right)+\left(a_2+a_4+...+a_{2n}\right)$

$=\left(1+3+...+3^{n-1}\right)+2\left(1+3+...+3^{n-1}\right)=3\left(1+3+...+3^{n-1}\right)=\dfrac{3\left(3^n-1\right)}{2}$

从而 $S_{2n-1}=S_{2n}-a_{2n}=\dfrac{3\left(3^n-1\right)}{2}-2\times 3^{n-1}=\dfrac{3}{2}\left(5\times 3^{n-2}-1\right)$，

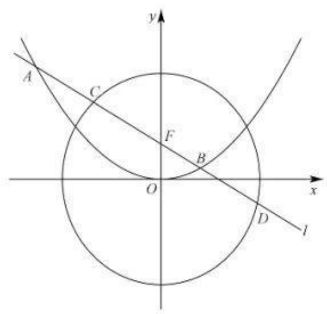
综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\left(5\times 3^{\frac{n-3}{2}}-1\right)\left(n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*\right)\\ \dfrac{3}{2}\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)\left(n=2k,k\in\mathbf{N}^*\right)\end{cases}$.

20. **解析** （1）由 $C_1:x^2=4y$ 知其焦点 F 的坐标为 $\left(0,1\right)$，因为 F 也是椭圆 C_2 的一个焦点，所以 $a^2-b^2=1$ ①；又 C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$，C_1 与 C_2 都关于 y 轴对称，且 C_1 的方程为 $C_1:x^2=4y$，由此易知 C_1

与 C_2 的公共点的坐标为 $\left(\pm\sqrt{6},\dfrac{3}{2}\right)$，

所以 $\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$②，

联立①②得 $a^2=9,b^2=8$，故 C_2 的方程为 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{8}=1$.



（2）如图所示，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，

因为 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向，且 $|AC|=|BD|$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，从而 $x_3-x_1=x_4-x_2$，

即 $x_3-x_4=x_1-x_2$，于是

$(x_3+x_4)^2-4x_3\cdot x_4=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2$③

设直线 l 的斜率为 k，则 l 的方程为 $y=kx+1$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，由 x_1,x_2 是这个方程的两根，$x_1+x_2=4k,x_1\cdot x_2=-4$④

由 $\begin{cases}y=kx+1\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 得 $(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$，而 x_3,x_4 是这个方程的两根，

$x_3+x_4=-\dfrac{16k}{9+8k^2},x_3\cdot x_4=-\dfrac{64}{9+8k^2}$，⑤

将④,⑤代入③，得 $16(k^2+1)=\dfrac{256k^2}{(9+8k^2)^2}+\dfrac{4\times64}{9+8k^2}$.即 $16(k^2+1)=\dfrac{16^2\times9(k^2+1)}{(9+8k^2)^2}$

所以 $(9+8k^2)^2=16\times9$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即直线 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

21. **解析**　（1）$f'(x)=ae^x\cos x-ae^x\sin x=\sqrt{2}ae^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

令 $f'(x)=0$，由 $x\geqslant0$，得 $x+\dfrac{\pi}{4}=m\pi-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=m\pi-\dfrac{3\pi}{4}m\in\mathbf{N}^*$，

若 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，则 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$；

若 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，即 $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}$，则 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$.

因此，在区间$\left((m-1)\pi, m\pi-\frac{3\pi}{4}\right)$与$\left(m\pi-\frac{3\pi}{4}, m\pi+\frac{\pi}{4}\right)$上，$f'(x)$的符号总相反，

于是当$x=m\pi-\frac{3\pi}{4} m\in \mathbf{N}^*$时，$f(x)$取得极值，所以$x_n=n\pi-\frac{3\pi}{4}, n\in \mathbf{N}^*$，

此时，$f(x_n)=ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}\cos\left(n\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}$，易知$f(x_n)\neq 0$，

而$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{(-1)^{n+2}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{(n+1)\pi-\frac{3\pi}{4}}}{(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}}=-e^{\pi}$是常数，

故数列$\{f(x_n)\}$是首项为$f(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{\frac{\pi}{4}}$，公比为$-e^{\pi}$的等比数列.

（2）对一切$n\in \mathbf{N}^*$恒成立，即$\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}$恒成立，

亦即$\frac{\sqrt{2}}{a}\leqslant\frac{e^{\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}}{\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}$恒成立，（因为$a>0$）

设$g(t)=\frac{e^t}{t}(t>0)$，则$g'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$，令$g'(t)=0$得$t=1$，

当$0<t<1$时，$g'(t)<0$，所以$g(t)$在区间$(0,1)$上单调递减；

当$t>1$时，$g'(t)>0$，所以$g(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增；

因为$x_n\in(0,1)$，且当$n\geqslant 2$时，$x_n\in(1,+\infty), x_n<x_{n+1}$，

所以$[g(x_n)]_{\min}=\min\{g(x_1), g(x_2)\}=\min\left\{g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$，

因此$n\in \mathbf{N}^*, x_n\leqslant|f(x_n)|$恒成立，当且仅当$\frac{\sqrt{2}}{a}\leqslant\frac{4}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$，解得$a\geqslant\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

故实数a的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}, +\infty\right)$.