答案

一、选择题

1.D　　2.C　　3.B　　4.A　　5.A　　6.D　　7.C　　8.B　　9.D　　10.A

二、填空题

11.0　　12.4　　13.$\sqrt{5}$　　14.3^{n-1}　　15.$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

三、解答题

16.

Ⅰ.解：（1）如图 a 所示， 因为 M，N 分别是弦 AB,CD 的中点，所以 OM⊥AB,ON⊥CD,

即∠OME=90^o， ∠ENO=90^o，∠OME+∠ENO =180^o，又四边形的内角和等于360^o，故∠MEN+∠NOM=180^o；（2）由（I）知，O,M,E,N 四点共圆，故由割线定理即得 $FE\cdot FN = FM\cdot FO$

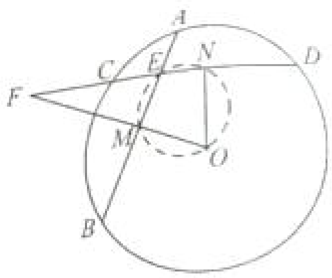


图 a

Ⅱ.解：（1）$\rho = 2\cos\theta$ 等价于 $\rho^2 = 2\rho\cos\theta$ ①，将 $\rho^2 = x^2 + y^2$，$\rho = \cos\theta = x$ 带入①，即得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ②，

(2).将 $\begin{cases} x = 5 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 代入②，得 $t^2 + 5\sqrt{3}t + 18 = 0$，设这个方程的两个实数根分别为 t_1,t_2,则由参数 t 的几何意义即知，$|MA|\bullet|MB| = |t_1t_2| = 18$.

Ⅲ证明：由 $a+b = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$，$a>0$，$b>0$，得 $ab=1$.

（1）由基本不等式及 $ab=1$，有 $a+b \ge 2\sqrt{ab} = 2$，即 $a+b\ge 2$；

（2）假设 $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 同时成立，则由 $a^2+a<2$ 及 $a>0$ 得 $0<a<1$，同理 $0<b<1$，从而 $ab<1$，这与 $ab=1$ 矛盾，故 $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 不可能同时成立.

17.解：（I）由 a=btanA 及正弦定理，得 $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin B}{\cos B}$,所以 sinB=cosA，即 sinB=sin（$\dfrac{\pi}{2}$+A）.

又 B 为钝角，因此 $\dfrac{\pi}{2}$+A∈（$\dfrac{\pi}{2}$，π），故 B=$\dfrac{\pi}{2}$+A，即 B-A=$\dfrac{\pi}{2}$；

（Ⅱ）由（I）知，C=π-（A+B）=π-(2A+$\dfrac{\pi}{2}$)=$\dfrac{\pi}{2}$-2A>0，所以 A∈$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，于是

sinA+sinC=sinA+sin（$\dfrac{\pi}{2}$-2A）= sinA+cos2A=-2$\sin^2$A+sinA+1 =-2（sinA-$\dfrac{1}{4}$）^{2}+$\dfrac{9}{8}$，因为 0<A<$\dfrac{\pi}{4}$，

所以 0<sinA<$\frac{\sqrt{2}}{2}$,因此$\frac{\sqrt{2}}{2}$<-2$\left(\sin A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\le\frac{9}{8}$

由此可知 sinA+sinC 的取值范围是（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9}{8}$].

18. 解：（Ⅰ）记事件 A_1=｛从甲箱中摸出的 1 个球是红球｝，

A_2=｛从乙箱中摸出的 1 个球是红球｝

B_1=｛顾客抽奖 1 次获一等奖｝

B_2=｛顾客抽奖 1 次获二等奖｝，

C=｛顾客抽奖 1 次能获奖｝.

由题意，A_1与A_2相互独立，$A_1\overline{A_2}$与$\overline{A_1}A_2$互斥，B_1与B_2互斥，且$B_1=A_1A_2$，$B_2=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$，C=$B_1+B_2$.

因 P（A_1）=$\frac{4}{10}$=$\frac{2}{5}$，P(A_2)=$\frac{5}{10}$=$\frac{1}{2}$，所以 P（B_1）=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$=$\frac{1}{5}$，

P（B_2）=P（$A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$）=P（$A_1\overline{A_2}$）+P（$\overline{A_1}A_2$）=P（$A_1$）(1- P($A_2$))+(1- P（$A_1$）)P($A_2$)

=$\frac{2}{5}\times$(1-$\frac{1}{2}$)+(1-$\frac{2}{5}$)$\times\frac{1}{2}$=$\frac{1}{2}$，故所求概率为 P(C)= P(B_1+B_2)=P（B_1）+ P（B_2）=$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$.

（Ⅱ）顾客抽奖 3 次独立重复试验，由（I）知，顾客抽奖 1 次获一等奖的概率为$\frac{1}{5}$，

所以 X~B（3，$\frac{1}{5}$）.

于是

P(X=0)=$C_3^0(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125}$，P(X=1)=$C_3^1(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2=\frac{48}{125}$，P(X=2)=$C_3^2(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1=\frac{12}{125}$，

P(X=3)=$C_3^3(\frac{1}{5})^3(\frac{4}{5})^0=\frac{1}{125}$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

X 的数学期望为 E（X）=3$\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

19. 解法 1：由题设知，AA_1,AB,AD两两垂直。以 A 为坐标原点，AB,AD,AA_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图 b 所示的空间直角坐标系，则相关各点的坐标为$A(0,0,0),B_1(3,0,6)$，D(0，6，0),D_1(0，3，6),Q(6，m，0)，其中 m=BQ,$0\le m\le 6$

（1）若 P 是DD_1的中点，则 P（0,$\frac{9}{2}$，3），$\overline{PQ}=(6,m-\frac{9}{2},3)$ $\overrightarrow{AB_1}$=(3,0 ,6)，于是$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overline{PQ}$=18-18=0，

所以$\overline{AB_1}\perp\overline{PQ}$，即$AB_1\perp PQ$；

（2）由题设知，$\overline{DQ}$=(6，m-6,0),$\overline{DD_1}$=(0,-3,6)是平面 PQD 内的两个不共线向量.

设n_1=（x，y，z）是平面 PQD 的一个法向量，则$\begin{cases} n_1\cdot\overline{DQ}=0 \\ n_1\cdot\overline{DD_1}=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} 6x+(m-6)y=0 \\ -3y+6z=0 \end{cases}$，

取 y=6，得n_1=（6-m，6,3）.又平面 AQD 的一个法向量是n_2=（0，0，1），所以

$\cos<n_1,n_2>=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}$而二面角 P-QD-A 的余弦值为$\dfrac{3}{7}$，因此$\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}$.解得 m=4，或 m=8(舍去)，此时 Q（6,4,0）

设$\overline{DP}=\lambda\overline{DD_1}(0<\lambda\le 1)$,而$\overline{DD_1}=(0,-3,6)$,由此得点$P(0,6-3\lambda,6\lambda)$，

所以 因为 PQ//平面ABB_1A_1,且平面ABB_1A_1的一个法向量是$n_3=(0,1,0)$，

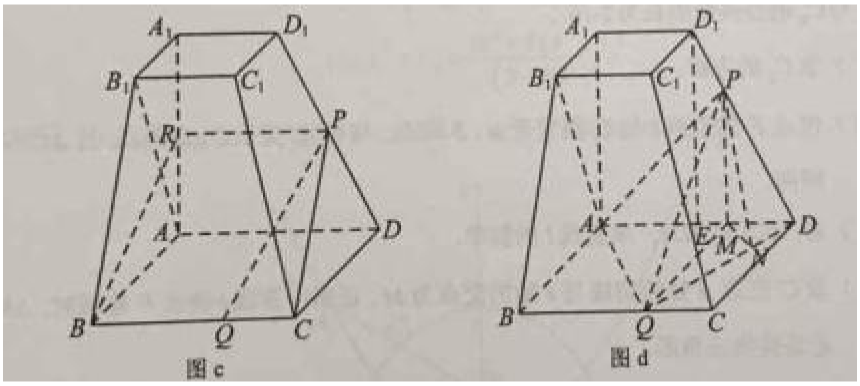
所以$\overline{PQ}\bullet n_3=0$，即 3$\lambda$-2=0，亦即$\lambda=\dfrac{2}{3}$，从而 P（0,4,4），于是，将四面体 ADPQ 视为△ADQ 为底面的三菱锥 P-ADQ,则其高h=4,故四面体 ADPQ 的体积$V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times 4=24$.

解法二 （Ⅰ）如图 c，取A_1A的中点 R，连结 PR,BR,因为A_1A，D_1D是梯形A_1AD_1D的两腰，P 是D_1D的中点，所以 PR//AD，于是由 AD//BC 知，PR//BC,所以 P,R,B,C 四点共面.

由题设知，BC⊥AB,BC⊥A_1A,所以 BC⊥平面ABB_1A_1,因此 BC⊥AB_1 ①

因为 tan$\angle ABR=\dfrac{AR}{AB}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{AB_1}{A_1A}$=tan$\angle A_1AB_1$,所以 tan$\angle ABR$=tan$\angle A_1AB_1$，因此

$\angle ABR+\angle BAB_1=\angle A_1AB_1+\angle BAB_1=90^o$，于是$AB_1\perp$BR，再由①即知$AB_1\perp$平面 PRBC，又 PQ⊂平面 PRBC，故$AB_1\perp$PQ.



（Ⅱ）如图 d，过点 P 作 PM//A_1A交 AD 于点 M，则 PM//平面ABB_1A_1.

因为$A_1A\perp$平面 ABCD，所以 OM⊥平面 ABCD,过点 M 作 MN⊥QD 于点 N，连结 PN，则 PN⊥QD，$\angle PNM$为二面角 P-QD-A 的平面角，所以 cos$\angle PNM=\dfrac{3}{7}$，即$\dfrac{MN}{PN}=\dfrac{3}{7}$,从而$\dfrac{PM}{MN}=\dfrac{\sqrt{40}}{3}$. ③

连结 MQ,由 PQ//平面ABB_1A_1,所以 MQ//AB,又 ABCD 是正方形,所以 ABQM 为矩形,故 MQ=AB=6.

设 MD=t，则 MN=$\dfrac{MQ\cdot MD}{\sqrt{MQ^2+MD^2}}=\dfrac{6t}{\sqrt{36+t^2}}$.④过点$D_1$作$D_1E//A_1A$交 AD 于点 E，则$AA_1D_1E$为矩形，所以$D_1E=A_1A$=6，AE=$A_1D_1$=3，因此 ED=AD-AE=3，于是$\dfrac{PM}{MD}=\dfrac{D_1E}{ED}=\dfrac{6}{3}=2$,所以 PM=2MD=2t，

再由③④得$\dfrac{\sqrt{36+t^2}}{3}=\dfrac{\sqrt{40}}{3}$，解得 t=2，因此 PM=4.故四面体 ADPQ 的体积

$V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot PM=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times 4=24$.

20、解：（1）由$C_1: x^2=4y$知其焦点 F 的坐标为（0,1），因为 F 也是椭圆C_2的一焦点，所以 $a^2-b^2=1$ ①又C_1与C_2的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$，C_1与C_2都关于 y 轴对称，且C_1的方程为$x^2=4y$，由此易知C_1与C_2的公共点的坐标为（$\pm\sqrt{6},\dfrac{3}{2}$），所以$\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$ ②，联立①，②得a^2=9，b^2=8，故C_2的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ③；（2）如图f，设 A（x_1,y_1）B（x_2,y_2）C（x_3,y_3）D（x_4,y_4）.

（i）因$\overline{AC}$与$\overline{BD}$同向，且|AC|=|BD|,所以$\overline{AC}=\overline{BD}$，从而$x_3-x_1=x_4-x_2$，即

$x_1-x_2=x_3-x_4$，于是$\left(x_1+x_2\right)^2$-4x_1x_2= $\left(x_3+x_4\right)^2$-4x_3x_4 ③

设直线l的斜率为 k，则l的方程为 y=kx+1.由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$.而$x_1$，$x_2$是这个方程的两根.所以$x_1+x_2$=4k，$x_1x_2$=-4④ ，由$\begin{cases}y=kx+1\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$得（9+8$k^2$）$x^2$+16kx-64=0.而$x_3$，$x_4$是这个方程的两根.所以

x_3+x_4=-$\dfrac{16k}{9+8k^2}$，x_3x_4=-$\dfrac{64}{9+8k^2}$ ⑤，将④⑤带入③ ，得 16（k^2+1）=$\dfrac{16k}{\left(9+8k^2\right)^2}+\dfrac{4\times 64}{9+8k^2}$,即

16（k^2+1）=$\dfrac{16^2\times 9(k^2+1)}{\left(9+8k^2\right)^2}$，所以$\left(9+8k^2\right)^2$=16×9，解得 k=$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即直线 l 的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

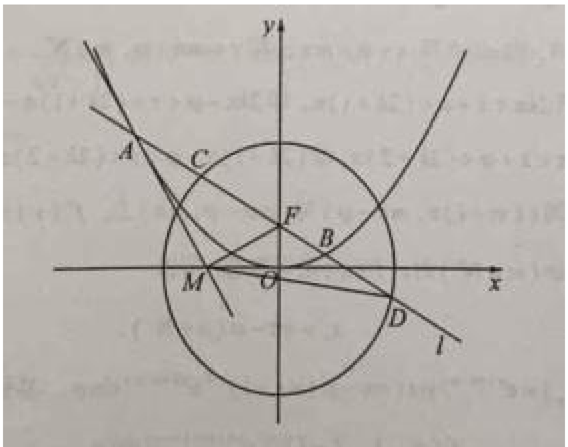


图 f

（ii）由$x^2=4y$得$y'=\dfrac{x}{2}$，所以C_1在点 A 处的切线方程为 y-y_1=$\dfrac{x_1}{2}$（x-x_1），即

y=x_1x-$\dfrac{x_1^2}{4}$.令 y=0 得 x=$\dfrac{x_1}{2}$，即 M（$\dfrac{x_1}{2}$,0）,所以$\overline{FM}$=($\dfrac{x_1}{2}$,-1).而$\overline{FA}$=(x_1,y_1-1).于是

$\overline{FA}\cdot\overline{FM}=\frac{x_1^2}{2}-y_1+1=\frac{x_1^2}{4}+1>0$，因此$\angle AFM$ 是锐角，从而$\angle MFD=180^o-\angle AFM$ 是钝角.
故直线 l 绕点 F 旋转时，△MFD 总是钝角三角形.

21. 解：（1） $f'(x)=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)=\sqrt{a^2+1}e^{ax}\sin(x+\rho)$
其中 $\tan\rho=\frac{1}{a}$，0<$\rho<\frac{\pi}{2}$.令 $f'(x)$=0，由 x$\geq$0 得 x+ρ=mx,　 即 x=$m\pi-\rho$，m$\in N^*$.
对 k$\in$N，若 2kπ<x+ρ<(2k+1) π,即 2k$\pi-\rho$<x<(2k+1) $\pi-\rho$,则 $f'(x)$>0；
若（2k+1）π<x+ρ<(2k+2) π,即（2k+1）$\pi-\rho$<x<(2k+2) $\pi-\rho$，则 $f'(x)$<0.
因此，在区间（（m-1）π，m$\pi-\rho$）与（m$\pi-\rho$，mπ）上，$f'(x)$的符号总相反.于是
当 x= m$\pi-\rho$ (m$\in N^*$)时，$f(x)$取得极值，所以$x_n=n\pi-\rho(n\in N^*)$.
此时，$f(x_n)=e^{a(n\pi-\rho)}\sin(n\pi-\rho)=(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\rho)}\sin\rho$. 易知 $f(x_n)\neq 0$，而

$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{(-1)^{n+2}e^{a[(n+1)\pi-\rho]}\sin\rho}{(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\rho)}\sin\rho}=-e^{ax}$ 是常数，故数列$\{f(x_n)\}$是首项为$f(x_1)=e^{a(n\pi-\rho)}\sin\rho$，公比为$-e^{ax}$的等比数列；（2）由（I）知，$\sin\rho=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$，于是对一切$n\in N^*,x_n<|f(x_n)|$恒成立，即

$n\pi-\rho<\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}e^{a(n\pi-\rho)}$ 恒成立，等价于$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}<\frac{e^{a(n\pi-\rho)}}{a(n\pi-\rho)}$（●）恒成立（因为 a>0），
设 g（t）=$\frac{e^t}{t}$（t）0），则 $g'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$.令 $g'(t)$=0 得 t=1，
当 0<t<1 时，$g'(t)<0$，所以 g（t）在区间（0,1）上单调递减；
当 t>1 时，$g'(t)>0$，所以 g（t）在区间（0,1）上单调递增.
从而当 t=1 时，函数 g（t）取得最小值 g（1）=e
因此，要是（●）式恒成立，只需$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}<g(1)=e$，即只需$a>\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$.
而当 a=$\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$时，由 $\tan\rho=\frac{1}{a}=\sqrt{e^2-1}>\sqrt{3}$ 且$0<\rho<\frac{\pi}{2}$.于是
$\pi-\rho<\frac{2\pi}{3}<\sqrt{e^2-1}$，且当 n$\geq$2 时，$n\pi-\rho\geq 2\pi-\rho\geq\frac{3\pi}{2}>\sqrt{e^2-1}$.因此对一切
$n\in N^*,ax_n=\frac{n\pi-\rho}{\sqrt{e^2-1}}\neq 1$，所以 g（$ax_n$）$>g(1)=e=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$.故（●）式亦恒成立.
综上所述，若 a$\geq\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切$n\in N^*$，$x_n<|f(x_n)|$恒成立.