

2015 年普通高等学校招生全国统一考试 (湖南卷) (理科)

本试题包括选择题，填空题和解答题三部分，共 6 页，时间 120 分钟，满分 150 分.

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

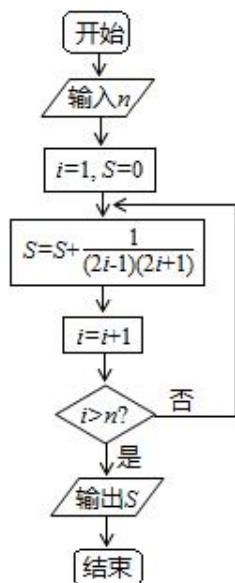
1. 已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位)，则复数 $z =$ ()

A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

2. 设 A, B 是两个集合，则 “ $A \cap B = A$ ” 是 “ $A \subseteq B$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 执行如图 1 所示的程序框图，如果输入 $n = 3$ ，则输出的 $S =$ ()



A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{4}{9}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq -1 \\ 2x-y \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$ ，则 $z = 3x - y$ 的最小值为 ()

A. -7 B. -1 C. 1 D. 2

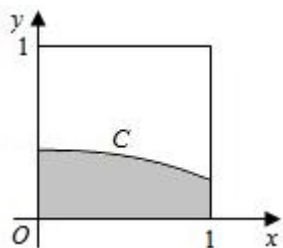
5. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ ，则 $f(x)$ 是 ()

A. 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数 B. 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数
C. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数 D. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

6. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 6 D. -6

7. 在如图 2 所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(0, 1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 ()



附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则
 $P(\mu - \sigma \leq \mu + \sigma) = 0.6826$
 $P(\mu - 2\sigma \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$

- A. 2386 B. 2718 C. 3413 D. 4772

8. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $AB \perp BC$. 若点 P 的坐标为 (2, 0), 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 的最大值为 ()

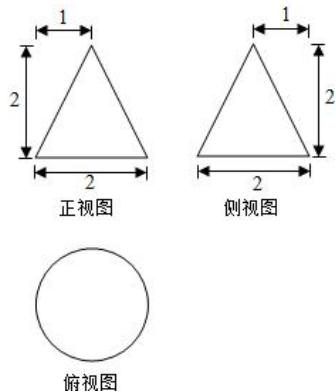
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图像向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像, 若对满足

$|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ()

- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

10. 某工件的三视图如图 3 所示, 现将该工件通过切割, 加工成一个体积尽可能大的长方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为



(材料利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) ()

- A. $\frac{8}{9\pi}$ B. $\frac{16}{9\pi}$ C. $\frac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$ D. $\frac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $\int_0^2 (x-1)dx =$ _____.

12. 在一次马拉松比赛中，35 名运动员的成绩（单位：分钟）的茎叶图如图 4 所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号，再用系统抽样方法从中抽取 7 人，则其中成绩在区间 [139, 151] 上的运动员人数是 _____.

13. 设 F 是双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点，若 C 上存在点 P，使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点，则 C 的离心率为_____.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前项和，若 $a_1 = 1$ ，且 $3S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列，则 $a_n =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$ ，若存在实数 b ，使函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

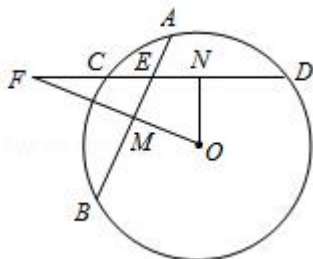
16. (本小题满分 12 分)

本小题设有 I, II, III 三个选做题，请考生任选两题作答，并将解答过程写在答题卡中相应题号的答题区域内。如果全做，则按所做的前两题计分。

I (本题满分 6 分) 选修 4-1, 几何证明选讲

如图，在圆 $\odot O$ 中，相交于点 E 的两弦 AB、CD 的中点分别是 M、N，直线 MO 与直线 CD 相交于点 F，证明：

- (1) $\angle MEN + \angle NOM = 180^\circ$;
- (2) $FE \cdot FN = FM \cdot FO$



II (本题满分 6 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知直线 $l: \begin{cases} x = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \sqrt{3} + \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

- (1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;
- (2) 设点 M 的直角坐标为 $(5, \sqrt{3})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

III (本题满分 6 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

- (1) $a + b \geq 2$;
- (2) $a^2 + a < 2$ 与 $b^2 + b < 2$ 不可能同时成立.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$, 且 B 为钝角

- (1) 证明: $B - A = \frac{\pi}{2}$
- (2) 求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围

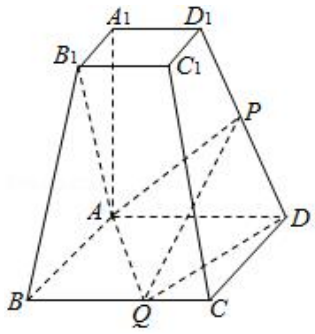
18. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额商品后即可抽奖, 每次抽奖都从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中, 各随机摸出 1 个球, 在摸出的 2 个球中, 若都是红球, 则获一等奖; 若只有 1 个红球, 则获二等奖; 若没有红球, 则不获奖.

- (1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率;
- (2) 若某顾客有 3 次抽奖机会, 记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

19.如图,已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形, $AA_1 = 6$, 且 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 点 P 、 Q 分别在棱 DD_1 、 BC 上.

(1) 若 P 是 DD_1 的中点, 证明: $AB_1 \perp PQ$;

(2) 若 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$, 求四面体 $ADPQ$ 的体积.



20.已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A 、 B 两点, 与 C_2 相交于 C 、 D 两点, 且 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BD} 同向

(i) 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率

(ii) 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M , 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形

21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^{ax} \sin x (x \in [0, +\infty))$. 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 个极值点, 证明:

(1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列

(2) 若 $a \geq \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$, 则对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < |f(x_n)|$ 恒成立.