2015年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷Ⅱ)

（理科数学）试卷参考答案

一、选择题

1.A

解析过程：

$\because (x-1)(x+2)<0$ 解得 $-2<x<1$，

$\therefore B=\{x|-2<x<1\}$，$\therefore A\cap B=\{-1,0\}$.

2.B

解析过程：

$\because (2+ai)(a-2i)=(2a+2a)+(a^2-4)i=-4i$，

$\therefore a^2-4=-4$ 解得 $a=0$.

3.D

解析过程：

由柱形图得，从2006年以来，

我国二氧化硫排放量呈下降趋势，

故年排放量与年份负相关

4.B

解析过程：

$\because a_1+a_3+a_5=a_1+a_1q^2+a_1q^4=3\left(1+q^2+q^4\right)=21$

$\therefore 1+q^2+q^4=7$，整理得$\left(q^2+3\right)\left(q^2-2\right)=0$

解得$q^2=2\therefore a_3+a_5+a_7=a_1q^2+a_1q^4+a_1q^6$

$=a_1q^2\left(1+q^2+q^4\right)=3\times 2\times 7=42$

5.C

解析过程：

$\because f(-2)=1+\log_2(2+2)=3$，

$f(\log_2 12)=2^{\log_2 12-1}=2^{\log_2 3+\log_2 4-1}=2^{\log_2 3+\log_2 2}=2^{\log_2 6}=6$，

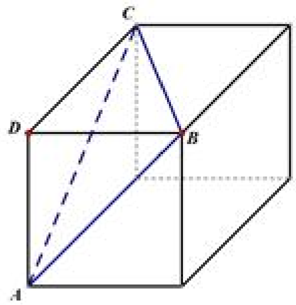
$\therefore f(-2)+f(\log_2 12)=9$.

6.D

解析过程：

如图所示截面为ABC，设边长为a，则截取部分体积为$\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}\left|DB\right|=\frac{1}{6}a^3$，

所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\dfrac{\frac{1}{6}a^3}{1-\frac{1}{6}a^3}=\dfrac{1}{5}$



7.C

解析过程：

由题可得 $\begin{cases}1+9+D+3E+F=0\\10+4+4D+2E+F=0\\1+49+D-7E+F=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-2\\E=4\\F=-20\end{cases}$，

所以圆方程为 $x^2+y^2-2x+4y-20=0$，令 $x=0$，解得 $y=-2\pm2\sqrt{6}$，

所以 $|MN|=\left|-2+2\sqrt{6}-\left(-2-2\sqrt{6}\right)\right|=4\sqrt{6}$

8.B

解析过程：

输入 $a=14,b=18$

第一步 $a\neq b$ 成立，执行 $a>b$，不成立执行 $b=b-a=18-14=4$

第二步 $a\neq b$ 成立，执行 $a>b$，成立执行 $a=a-b=14-4=10$，

第三步$a \neq b$成立，执行$a > b$，成立执行$a = a - b = 10 - 4 = 6$

第四步$a \neq b$成立，执行$a > b$，成立执行$a = a - b = 6 - 4 = 2$

第四步$a \neq b$成立，执行$a > b$，不成立执行$b = b - a = 4 - 2 = 2$

第五步$a \neq b$不成立，输出$a = 2$.选 B

9.C

解析过程：

设球的半径为r，三棱锥$O - ABC$的体积为$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABO}h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}r^2h = \frac{1}{6}r^2h$，

点C到平面ABO的最大距离为r，$\therefore \frac{1}{6}r^3 = 36$，解得$r = 6$，

球表面积为$4\pi r^2 = 144\pi$.

10.B

解析过程：

由已知得，

当点P在BC边上运动时，即$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$时，

$PA + PB = \sqrt{\tan^2 x + 4} + \tan x$；

当点P在CD边上运动时，即$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}, x \ne \frac{\pi}{2}$时，

$PA+PB=\sqrt{\left(\frac{1}{\tan^2 x}-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{1}{\tan^2 x}+1\right)^2+1}$，

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$PA+PB=2\sqrt{2}$；

当点P在边DA上运动时，即$\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$时，

$PA+PB=\sqrt{\tan^2 x+4}-\tan x$，

从点P的运动过程可以看出，轨迹关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，

且$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，且轨迹非线性，故选 B

11.D

解析过程：

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，

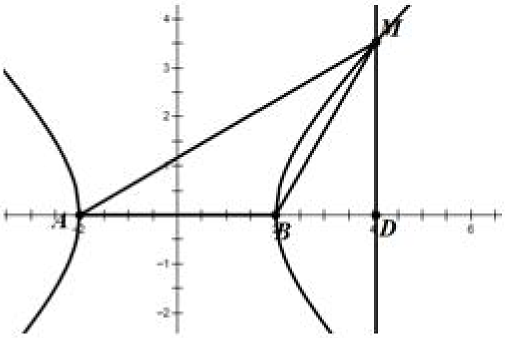
如图所示，$|AB|=|BM|$，$\angle ABM=120^\circ$，

过点M作$MD \perp x$轴，垂足为D.在$RtBMD$中，$|BD|=a,|MD|=\sqrt{3}a$，

故点M的坐标为$M\left(2a,\sqrt{3}a\right)$，

代入双曲线方程得 $\frac{4a^2}{a^2}-\frac{3a^2}{b^2}=1$，化简得 $a^2=b^2$，

所以 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.故选 D



12.A

解析过程：记函数 $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}$，则 $g'\left(x\right)=\frac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}$，

因为当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)-f\left(x\right)<0$，

故当 $x>0$ 时，$g'\left(x\right)<0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递减；

又因为函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数，故函数 $g\left(x\right)$ 是偶函数，

所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 单调递减，

且 $g\left(-1\right)=g\left(1\right)=0$. 当 $0<x<1$ 时，$g\left(x\right)>0$，则 $f\left(x\right)>0$；

当 $x<-1$ 时，$g\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)>0$，

综上所述，使得 $f\left(x\right)>0$ 成立的 x 的取值范围是

$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,1\right)$，故选 A.

二、填空题

13. $\dfrac{1}{2}$

解析过程：

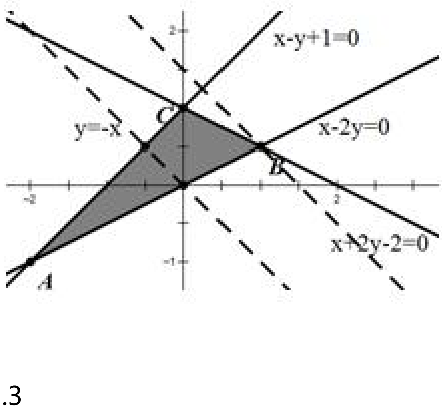
设 $\lambda\vec{a}+\vec{b}=x\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$，可得 $\begin{cases}\lambda=x\\1=2x\end{cases}$，解得 $\lambda=x=\dfrac{1}{2}$.

14. $\dfrac{3}{2}$

解析过程：

如图所示，可行域为 $\triangle ABC$，直线 $y=-x+z$ 经过点 B 时，z 最大.

联立 $\begin{cases}x-2y=0\\x+2y-2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，所以 $z_{\max}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

，

15.3

解析过程：

$(a+x)(1+x)^4=C_4^0a+C_4^1ax+C_4^2ax^2+C_4^3ax^3+C_4^4ax^4$

$+C_4^0x+C_4^1x^2+C_4^2x^3+C_4^3x^4+C_4^4x^5$,

所以$C_4^1a+C_4^3a+C_4^0+C_4^2+C_4^4=32$，解得$a=3$.

16. $-\dfrac{1}{n}$

解析过程:

$\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$, $\therefore \dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=1$

即$\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=-1$, $\therefore \left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是等差数列,

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{S_1}-(n-1)=-1-n+1=-n$即$S_n=-\dfrac{1}{n}$.

三、解答题

17.（Ⅰ）$\dfrac{1}{2}$（Ⅱ）$|BD|=\sqrt{2}$, $|AC|=1$

解析过程:

（Ⅰ）如图所示,

由题意可得$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}|AB||AD|\sin\angle BAD$,

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}|AC||AD|\sin\angle CAD$，

$\because S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC},\angle BAD=\angle DAC$，

$\therefore |AB|=2|AC|$，$\therefore \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{1}{2}$.

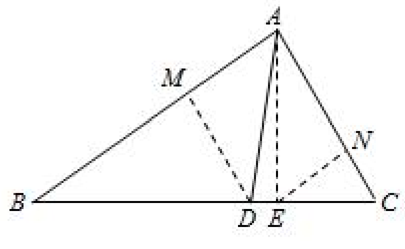
（Ⅱ）设 BC 边上的高为 h，则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|BD|h=2S_{\triangle ADC}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}h$，

解得 $|BD|=\sqrt{2}$，设 $|AC|=x,|AB|=2x$，

则 $\cos\angle BAD=\frac{4x^2+1-2}{4x}$，$\cos\angle DAC=\frac{x^2+1-\frac{1}{2}}{2x}$.

$\because \cos\angle DAC=\cos\angle BAD$ $\therefore \frac{4x^2+1-2}{4x}=\frac{x^2+1-\frac{1}{2}}{2x}$，

解得 $x=1$ 或 $x=-1$（舍去）. $\therefore |AC|=1$.



18.

（Ⅰ）如图所示.通过茎叶图可知 A 地区的平均值比 B 地区的高，

A 地区的分散程度大于 B 地区.

A地区		B地区
	4	6 8
3	5	1 3 4 6
6 4 2	6	2 4 5 5
6 8 8 6 4 3	7	3 3 4 6 9
9 8 6 5 2 1	8	1 2 3
7 5 5 2	9	1 3

（Ⅱ）记事件不满意为事件 A_1， B_1，满意为事件 A_2， B_2，

非常满意为事件 A_3， B_3.则由题意可得

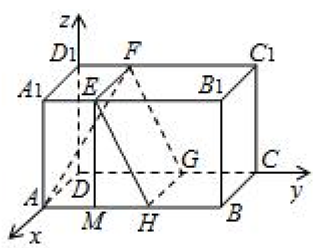
$$P(A_1)=\frac{4}{20},P(A_2)=\frac{12}{20},\ P(A_3)=\frac{4}{20},P(B_1)=\frac{10}{20},P(B_2)=\frac{8}{20},P(B_3)=\frac{2}{20}$$

则 $P(C)=P(A_2)P(B_1)+P(A_3)\left(P(B_1)+P(B_2)\right)$.

$$=\frac{12}{20}\times\frac{10}{20}+\frac{4}{20}\times\left(\frac{10}{20}+\frac{8}{20}\right)=\frac{12}{25}$$

19.

（Ⅰ）如图所示



（Ⅱ）建立空间直角坐标系.由题意和（Ⅰ）可得

$$A(10,0,0),F(0,4,8),E(10,4,8),G(10,10,0)$$

则 $\overrightarrow{AF}=(-10,4,8),\overrightarrow{EF}=(-10,0,0),\overrightarrow{EG}=(0,6,-8)$.

设平面 $EFHG$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-10x=0\\ 6y-8z=0\end{cases}$,

解得 $x=0$，令 $y=4,z=3$，则 $\vec{n}=(0,4,3)$

所以直线 AF 与 α 平面所成角的正弦值为

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AF},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{16+24}{\sqrt{100+16+84}\sqrt{16+9}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

20.

（Ⅰ）设直线 l 的方程为 $y=kx+b,(k\neq 0)$，点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.联立方程 $\begin{cases}y=kx+b\\ 9x^2+y^2=m^2\end{cases}$,

消去 y 整理得 $(9+k^2)x^2+2kbx+b^2-m^2=0$ (*)

所以 $x_1+x_2=-\frac{2kb}{9+k^2},y_1+y_2=k\left(-\frac{2kb}{9+k^2}\right)+2b=\frac{18b}{9+k^2}$,

所以 $$k_{OM}\bullet k_{AB}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\bullet k=\frac{18b}{9+k^2}\bullet\left(-\frac{9+k^2}{2kb}\right)\bullet k=-9.$$

（Ⅱ）假设直线 l 存在，直线方程为 $y=kx+\frac{m(1-k)}{3},b=\frac{m(3-k)}{3}$.

设点$P\left(x_p, y_p\right)$，则由题意和（I）

可得$x_p = x_1 + x_2 = -\dfrac{2kb}{9+k^2}, y_p = y_1 + y_2 = \dfrac{18b}{9+k^2}$，因为点$P$在椭圆上，

所以$9\left(-\dfrac{2kb}{9+k^2}\right)^2 + \left(\dfrac{18b}{9+k^2}\right)^2 = m^2$，整理得$36b^2 = m^2\left(9+k^2\right)$，

即$36\left(\dfrac{m(3-k)}{3}\right)^2 = m^2\left(9+k^2\right)$，

化简得$k^2 - 8k + 9 = 0$，解得$k = 4 \pm \sqrt{7}$，

有（*）知$\Delta = 4k^2b^2 - 4\left(9+k^2\right)\left(b^2 - m^2\right) > 0$，

验证可知$k = 4 \pm \sqrt{7}$都满足.

21.

（I）因为$f\left(x\right) = e^{mx} + x^2 - mx$，

所以$f'\left(x\right) = me^{mx} + 2x - m$，

$f''\left(x\right) = m^2e^{mx} + 2 \geq 0$在$R$上恒成立，

所以$f'\left(x\right) = me^{mx} + 2x - m$在$R$上单调递增.

而$f'\left(0\right) = 0$，所以$x > 0$时，$f'\left(x\right) > 0$；

所以$x < 0$时，$f'\left(x\right) < 0$.

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$单调递减，在$\left(0,+\infty\right)$单调递增.

（Ⅱ）有（Ⅰ）知$f_{\min}\left(x\right)=f\left(0\right)=1$，

当$m=0$时，$f\left(x\right)=1+x^2$，

此时$f\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$上的最大值是2.

所以此时$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le e-1$.

当$m\ne 0$时，$f\left(-1\right)=e^{-m}+1+m$，$f\left(1\right)=e^{m}+1-m$

令$g\left(m\right)=f\left(1\right)-f\left(-1\right)=e^{m}-e^{-m}-2m$，

所以$g'\left(m\right)=e^{m}+e^{-m}-2\ge 0$

所以$g\left(m\right)=f\left(1\right)-f\left(-1\right)=e^{m}-e^{-m}-2m$在$R$上单调递增.

而$g\left(0\right)=0$，所以$m>0$时，$g\left(m\right)>0$，即$f\left(1\right)>f\left(-1\right)$.

所以$m<0$时，$g\left(m\right)<0$，即$f\left(1\right)<f\left(-1\right)$

当$m>0$时，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le f\left(1\right)-1=e^{m}-m\le e-1\Rightarrow m\le 1$

当$m<0$时，

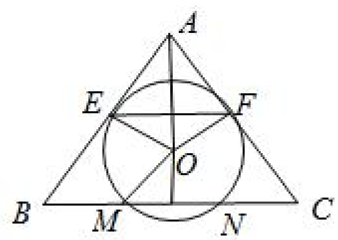
$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le f\left(-1\right)-1=e^{-m}+m\le e^{-m}-\left(-m\right)$

$\le e-1\Rightarrow -m\le 1\Rightarrow -1\le m\le 0$

所以，综上所述m的取值范围是$\left[-1,1\right]$

22.

（Ⅰ）如图所示，连接OE,OF，



则$OE\perp AB,OF\perp AC$即$\angle AEO=\angle AFO=90^{\circ}$.

因为$OE=OF$，所以$\angle OEF=\angle OFE$，

所以$\angle AEF=90^{\circ}-\angle OEF,\angle AFE=90^{\circ}-\angle OFE$，即$\angle AEF=\angle AFE$.

因为$\angle AEF+\angle AFE+\angle EAF=180^{\circ}$，

所以$\angle AEF=\angle AFE=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\angle EAF\right)$.

因为$\triangle ABC$是等腰三角形，

所以$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\angle BAC\right)$，

所以$\angle AEF=\angle AFE=\angle B=\angle C$，所以$EF\parallel BC$.

（Ⅱ）设$\odot O$的半径为r，$\therefore AG=r,OA=2r$.

在$Rt\triangle AEO$中，$\therefore AE^{2}+EO^{2}=AO^{2}$.$\therefore\left(2\sqrt{3}\right)^{2}+r^{2}=\left(2r\right)^{2}$，解得$r=2$.

在$Rt\triangle AEO$中，$\sin\angle OAE=\frac{OE}{OA}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$. $\therefore\angle OAE=30^\circ$，

$\because\angle OAE=\angle OAF=\frac{1}{2}\angle EAF,AE=AF$，$\therefore\angle EAF=2\angle OAE=60^\circ$，

$\therefore\triangle AEF,\triangle ABC$是等边三角形.

连接OM，$\therefore OM=2$，$\because OD\perp MN$，

$\therefore MD=ND=\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}$.在$Rt\triangle ODM$，

$OD=\sqrt{OM^2-MD^2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$.

$\therefore AD=OA+OD=4+1=5$.

在$Rt\triangle ADB$中，$AB=\frac{AD}{\cos\angle BAD}=\frac{5}{\cos 30^\circ}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$四边形$EBCF$的面积为

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

23.

（I）将曲线C_2,C_3化为直角坐标系方程

$C_2:x^2+y^2-2y=0$，$C_3:x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0$.

联立$\begin{cases}x^2+y^2-2y=0\\x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

所以交点坐标为$(0,0)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

（Ⅱ）曲线C_1的极坐标方程为$\theta=\alpha(\rho\in R,\rho\neq 0)$，其中$0\leq\alpha<\pi$.

因此A的极坐标为$(2\sin\alpha,\alpha)$，B的极坐标为$(2\sqrt{3}\cos\alpha,\alpha)$.

所以$|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|=4\left|\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$.

当$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$时，$|AB|$取得最大值，最大值为4.

24.

（Ⅰ）由题意可得$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab},$

$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2=c+d+2\sqrt{cd}$，

$\because ab>cd,\therefore\sqrt{ab}>\sqrt{cd}$，而$a+b=c+d$，

$\therefore\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

（Ⅱ）$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} > \sqrt{cd} \Leftrightarrow ab > cd$$

$$\Leftrightarrow -4ab < -4cd \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 < (c-d)^2$$

$$\Leftrightarrow |a-b| < |c-d|$$