

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学 (全国卷 II)

(青海、西藏、甘肃、贵州、内蒙古、新疆、宁夏、吉林、黑龙江、云南、辽宁、广西、海南等)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 3 页, 第 II 卷 3 至 5 页.
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置.
3. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效.
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回.

第 I 卷

一、 选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x+2) < 0\}$, 则 $A \cap B = ()$

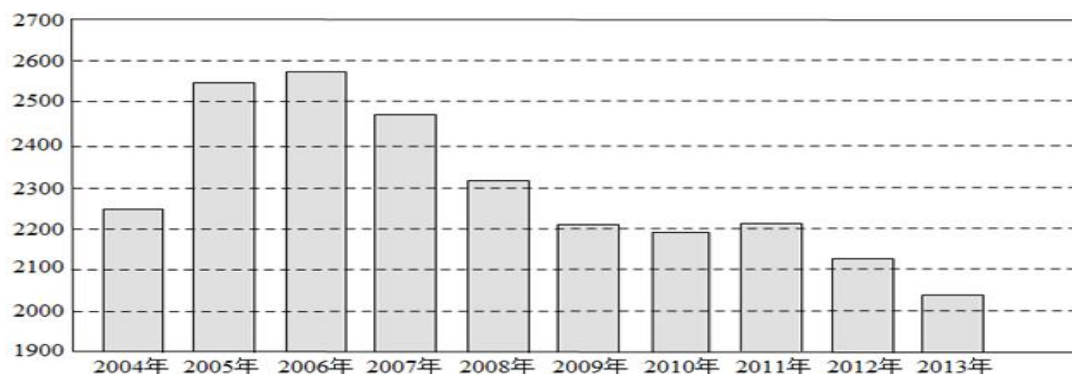
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 若 a 为实数, 且 $(2+ai)(a-2i) = -4i$, 则 $a = ()$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫排放量 (单位: 万吨) 柱形图,

以下结论中不正确的是 ()



A. 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

C. 2006 年以来我国二氧化硫排放量呈减少趋势

D. 2006 年以来我国二氧化硫排放量与年份正相关

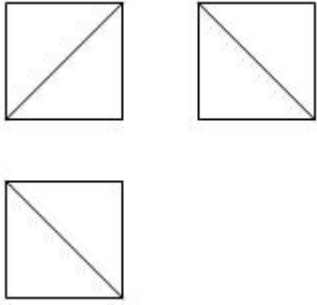
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 = ()$

A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-2) + f(\log_2 12) = ()$

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()

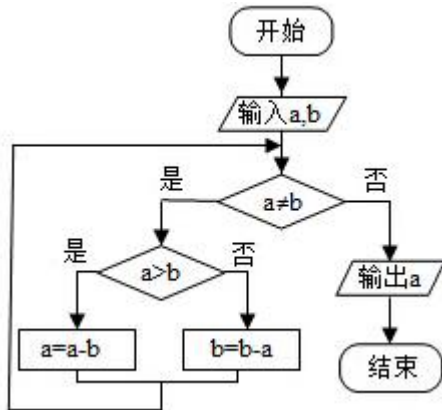


A. B. C. D.

7.过三点 A (1,3) , B (4,2) , C (1, -7) 的圆交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN| = ()$

A. $2\sqrt{6}$ B. 8 C. $4\sqrt{6}$ D. 10

8.下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 a = ()

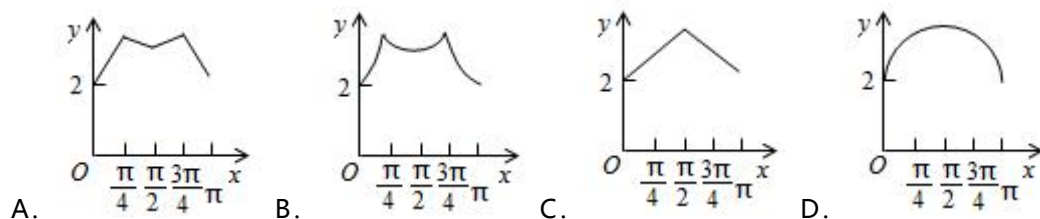
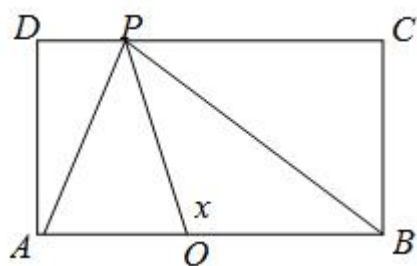


A. 0 B. 2 C. 4 D. 14

9.已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球上的动点, 若三棱锥 O-ABC 的体积最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()

- A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π

10.如图,长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点,点 P 沿着边 BC , CD 与 DA 运动,记 $\angle BOP = x$, 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数, 则 $y = f(x)$ 的图像大致为 ()



11.已知 A, B 为双曲线 E 的左, 右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

12.设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时, $x f'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题

13. 设向量 a, b 不平行, 向量 $\lambda a + b$ 与 $a + 2b$ 平行, 则实数 $\lambda =$

14. 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$$
, 则 $z = x + y$ 的最大值为

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a =$

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = -1, a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n =$

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍

(I) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$

(II) 若 $AD = 1, DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机抽查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区: 62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B地区: 73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 给出结论即可)

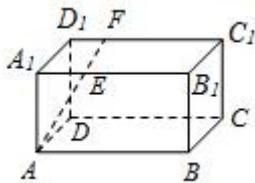
A地区		B地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

(II) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C: “A 地区用户的满意等级高于 B 地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果互相独立. 根据所给的数据, 以事件发生的频率作为响应事件的概率, 求 C 的概率

19.如图,长方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E = D_1F = 4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.



(I) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);

(II) 求直线 AF 与 α 平面所成角的正弦值.

20.已知椭圆 $C: 9x^2 + y^2 = M^2 (M > 0)$, 直线 l 不过圆点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

(I) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(II) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

21. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

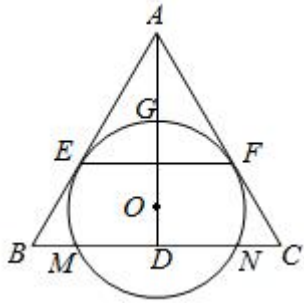
(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

22. 选修 4—1: 几何证明选讲

如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边的高 AD 交于点 G , 切与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.

(I) 证明: $EF \parallel BC$;

(II) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23.选修 4—4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha, \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$

在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$.

(I) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(II) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值。

24.选修 4-5: 不等式选讲

设 α, b, c, d 均为正数, 且 $\alpha + b = c + d$, 证明:

(I) 若 $\alpha b > cd$, 则 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(II) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|\alpha - b| < |c - d|$ 的充要条件。

