一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 **4** 分，满分 **40** 分。

1. A	**2**. B	**3**. A	**4**. D	**5**. B
6. C	**7**. D	**8**. A	**9**. B	**10**. C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 **6** 分，单空题每题 **4** 分，满分 **36** 分。

11. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　**12**. 5，2　　**13**. 16，4　　**14**. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

15. 4，$2\sqrt{5}$　　**16**. 660　　**17**. $(-\infty, \dfrac{9}{2}]$

三、解答题：本大题共 **5** 小题，共 **74** 分。

18. 本题主要考查三角函数的性质及其变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分 **14** 分。

（Ⅰ）由 $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，

$$f(\frac{2\pi}{3})=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(-\frac{1}{2})^2-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{1}{2}),$$

得

$$f(\frac{2\pi}{3})=2.$$

（Ⅱ）由 $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ 与 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\\&=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6}).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.

由正弦函数的性质得

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

解得

$$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

所以，$f(x)$ 的单调递增区间是 $[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

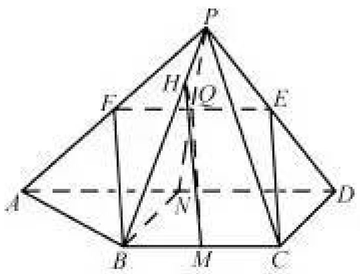
19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分 15 分。

（Ⅰ）如图，设 PA 中点为 F，连结 EF，FB.

因为 E，F 分别为 PD，PA 中点，所以

$$EF /\!/ AD \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}AD,$$

又因为 $BC /\!/ AD$，$BC = \frac{1}{2}AD$，所以



（第 19 题图）

$$EF /\!/ BC \text{ 且 } EF = BC,$$

即四边形 $BCEF$ 为平行四边形，所以

$$CE /\!/ BF,$$

因此

$$CE /\!/ \text{平面 } PAB.$$

（Ⅱ）分别取 BC，AD 的中点为 M，N. 连结 PN 交 EF 于点 Q，连结 MQ.

因为 E，F，N 分别是 PD，PA，AD 的中点，所以 Q 为 EF 中点，

在平行四边形 $BCEF$ 中，

$$MQ /\!/ CE.$$

由 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形得

$$PN \perp AD.$$

由 $DC \perp AD$，N 是 AD 的中点得

$$BN \perp AD.$$

所以

$$AD \perp \text{平面 } PBN,$$

由 $BC /\!/ AD$ 得

$$BC \perp \text{平面 } PBN,$$

那么

$$\text{平面 } PBC \perp \text{平面 } PBN.$$

过点 Q 作 PB 的垂线，垂足为 H，连结 MH.

MH 是 MQ 在平面 PBC 上的射影，所以 $\angle QMH$ 是直线 CE 与平面 PBC 所成的角.

设 $CD = 1$.

在 $\triangle PCD$ 中，由 $PC = 2$，$CD = 1$，$PD = \sqrt{2}$ 得 $CE = \sqrt{2}$，

在 $\triangle PBN$ 中，由 $PN = BN = 1$，$PB = \sqrt{3}$ 得 $QH = \frac{1}{4}$，

在 Rt△MQH 中，$QH=\frac{1}{4}$，$MQ=\sqrt{2}$，

所以

$$\sin\angle QMH=\frac{\sqrt{2}}{8},$$

所以，直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{2}}{8}$.

20. 本题主要考查函数的最大(小)值，导数的运算及其应用，同时考查分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。

(Ⅰ)因为$(x-\sqrt{2x-1})'=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$，$(e^{-x})'=-e^{-x}$，

所以

$$f'(x)=(1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}})e^{-x}-(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}$$

$$=\frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}\ (x>\frac{1}{2}).$$

(Ⅱ)由

$$f'(x)=\frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}=0,$$

解得

$$x=1 \text{ 或 } x=\frac{5}{2}.$$

因为

x	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,\frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2},+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$	↘

又$f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2e^{-x}\geqslant 0$，

所以$f(x)$在区间$[\frac{1}{2},+\infty)$上的取值范围是$[0,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}]$.

21. 本题主要考查直线方程、直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查解析几何的基本思想方法和运算求解能力。满分 15 分。

（Ⅰ）设直线 AP 的斜率为 k，

$$k=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}=x-\frac{1}{2},$$

因为$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，所以直线 AP 斜率的取值范围是$(-1,1)$.

（Ⅱ）联立直线 AP 与 BQ 的方程

$$\begin{cases}kx-y+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}=0,\\ x+ky-\frac{9}{4}k-\frac{3}{2}=0,\end{cases}$$

解得点 Q 的横坐标是

$$x_Q=\frac{-k^2+4k+3}{2(k^2+1)}.$$

因为

$$|PA|=\sqrt{1+k^2}\,(x+\frac{1}{2})=\sqrt{1+k^2}\,(k+1),$$

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,(x_Q-x)=-\frac{(k-1)(k+1)^2}{\sqrt{k^2+1}},$$

所以

$$|PA|\cdot|PQ|=-(k-1)(k+1)^3.$$

令$f(k)=-(k-1)(k+1)^3$，

因为

$$f'(k)=-(4k-2)(k+1)^2,$$

所以$f(k)$在区间$(-1,\frac{1}{2})$上单调递增，$(\frac{1}{2},1)$上单调递减，

因此当 $k=\frac{1}{2}$时，$|PA|\cdot|PQ|$取得最大值$\frac{27}{16}$.

22. 本题主要考查数列的概念、递推关系与单调性等基础知识，不等式及其应用，同时考查推理论证能力、分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。

（Ⅰ）用数学归纳法证明：$x_n>0$.

当 $n=1$ 时，$x_1=1>0$.

假设 $n=k$ 时，$x_k>0$，

那么 $n=k+1$ 时，若 $x_{k+1}\leqslant 0$，则 $0<x_k=x_{k+1}+\ln(1+x_{k+1})\leqslant 0$，矛盾，故 $x_{k+1}>0$.

因此 $x_n > 0\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以

$$x_n = x_{n+1} + \ln(1 + x_{n+1}) > x_{n+1}.$$

因此 $0 < x_{n+1} < x_n\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

（Ⅱ）由 $x_n = x_{n+1} + \ln(1 + x_{n+1})$ 得,

$$x_n x_{n+1} - 4x_{n+1} + 2x_n = x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + (x_{n+1} + 2)\ln(1 + x_{n+1}).$$

记函数 $f(x) = x^2 - 2x + (x + 2)\ln(1 + x)\ (x \geqslant 0)$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1} + \ln(1 + x) > 0\ (x > 0),$$

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x) \geqslant f(0) = 0$,因此

$$x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + (x_{n+1} + 2)\ln(1 + x_{n+1}) = f(x_{n+1}) \geqslant 0,$$

故

$$2x_{n+1} - x_n \leqslant \frac{x_n x_{n+1}}{2}\ (n \in \mathbf{N}^*).$$

（Ⅲ）因为

$$x_n = x_{n+1} + \ln(1 + x_{n+1}) \leqslant x_{n+1} + x_{n+1} = 2x_{n+1},$$

所以

$$x_n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

由 $\dfrac{x_n x_{n+1}}{2} \geqslant 2x_{n+1} - x_n$ 得

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2} \geqslant 2\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\right) > 0,$$

所以

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \geqslant 2\left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{2}\right) \geqslant \cdots \geqslant 2^{n-1}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2},$$

故

$$x_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$

综上,

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}\ (n \in \mathbf{N}^*).$$