天津理数答案

1-4BDCA 5-8BCAA

9.-2；

10. $\frac{9\pi}{2}$；

11.2；

12.4 ；

13. $\frac{3}{11}$；

14.1080

15.（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，因为$a>b$，故由$\sin B=\frac{3}{5}$，可得$\cos B=\frac{4}{5}$.由已知及余弦定理，有

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13$，所以$b=\sqrt{13}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

所以，b的值为$\sqrt{13}$，$\sin A$的值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）及$a<c$，得$\cos A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13}$，

$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{5}{13}$.故$\sin(2A+\frac{\pi}{4})=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

16.（Ⅰ）解：随机变量X的所有可能取值为0,1,2,3.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$,

$P(X=2)=(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{24}=\frac{13}{12}$.

（Ⅱ）解：设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数，Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，则所求事件的概率为

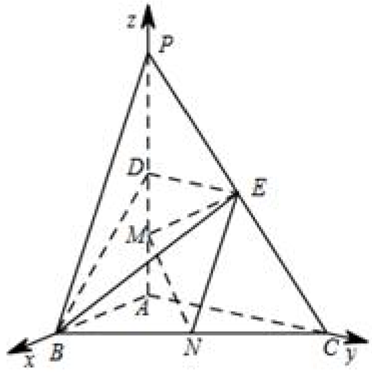
$P(Y+Z=1)=P(Y=0,Z=1)+P(Y=1,Z=0)=P(Y=0)P(Z=1)+P(Y=1)P(Z=0)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{11}{24}+\frac{11}{24}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{48}$.

所以，这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$.

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、异面直线所成的角等基础知识.考查用空间向量解决立体几何问题的方法.考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.满分 13 分.

如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系.依题意可得 A（0，0，0），B（2，0，0），C（0，4，0），P（0，0，4），D（0，0，2），E（0，2，2），M（0，0，1），N（1，2，0）.



（Ⅰ）证明：$\overrightarrow{DE}=$（0，2，0），$\overrightarrow{DB}=$（2，0，-2）.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ 2x-2z=0\end{cases}$.不妨设 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.又 $\overrightarrow{MN}=$（1，2，-1），可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，所以 MN//平面 BDE.

（Ⅱ）解：易知 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$ 为平面 CEM 的一个法向量.设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 EMN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EM}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$，

因为 $\overrightarrow{EM}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以 $\begin{cases}-2y-z=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$.不妨设 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}_2=(-4,1,-2)$.

因此有 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{4}{\sqrt{21}}$，于是 $\sin<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\sqrt{105}}{21}$.

所以，二面角 C—EM—N 的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

（III）解：依题意，设 $AH=h$（$0 \le h \le 4$），则 H（0，0，h），进而可得 $\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$.由已知，得 $|\cos<\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}>|=\frac{|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{21}$，整理得 $10h^2-21h+8=0$，解得 $h=\frac{8}{5}$，或 $h=\frac{1}{2}$.

所以，线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

18.【解析】(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1(q+q^2)=12$，而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$.

又因为 $q>0$，解得 $q=2$.所以，$b_n=2^n$.

由 $b_3=a_4-2a_1$，可得 $3d-a_1=8$ ①.

由 $S_{11}=11b_4$，可得 $a_1+5d=16$ ②，

联立①②，解得 $a_1=1$，$d=3$，由此可得 $a_n=3n-2$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$.

（II）解：设数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 T_n，

由 $a_{2n}=6n-2$，$b_{2n-1}=2\times 4^{n-1}$，有 $a_{2n}b_{2n-1}=(3n-1)\times 4^n$，

故 $T_n=2\times 4+5\times 4^2+8\times 4^3+\cdots+(3n-1)\times 4^n$，

$4T_n=2\times 4^2+5\times 4^3+8\times 4^4+\cdots+(3n-4)\times 4^n+(3n-1)\times 4^{n+1}$，

上述两式相减，得 $-3T_n=2\times 4+3\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+3\times 4^n-(3n-1)\times 4^{n+1}$

$$=\frac{12\times(1-4^n)}{1-4}-4-(3n-1)\times 4^{n+1}$$
$$=-(3n-2)\times 4^{n+1}-8.$$

得 $T_n=\frac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\frac{8}{3}$.

所以，数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\frac{8}{3}$.

19.（Ⅰ）解：设 F 的坐标为 $(-c,0)$.依题意，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{2}=a$，$a-c=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$，$c=\frac{1}{2}$，$p=2$，

于是$b^2=a^2-c^2=\dfrac{3}{4}$.

所以，椭圆的方程为$x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为$y^2=4x$.

（Ⅱ）解：设直线AP的方程为$x=my+1(m\neq 0)$，与直线l的方程$x=-1$联立，可得点$P(-1,-\dfrac{2}{m})$，故$Q(-1,\dfrac{2}{m})$.将$x=my+1$与$x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$联立，消去x，整理得$(3m^2+4)y^2+6my=0$，解得$y=0$，或$y=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$.由点B异于点A，可得点$B(\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4},\dfrac{-6m}{3m^2+4})$.由$Q(-1,\dfrac{2}{m})$，可得直线$BQ$的方程为$(\dfrac{-6m}{3m^2+4}-\dfrac{2}{m})(x+1)-(\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1)(y-\dfrac{2}{m})=0$，令$y=0$，解得$x=\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故$D(\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2},0)$.所以$|AD|=1-\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}=\dfrac{6m^2}{3m^2+2}$.又因为$\triangle APD$的面积为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6m^2}{3m^2+2}\times\dfrac{2}{|m|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，整理得$3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得$|m|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以$m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以，直线AP的方程为$3x+\sqrt{6}y-3=0$，或$3x-\sqrt{6}y-3=0$.

20.（Ⅰ）解：由$f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$，可得$g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，

进而可得$g'(x)=24x^2+18x-6$.令$g'(x)=0$，解得$x=-1$，或$x=\dfrac{1}{4}$.

当x变化时，$g'(x),g(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4},+\infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	↗	↘	↗

所以，$g(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$，$(\dfrac{1}{4},+\infty)$，单调递减区间是$(-1,\dfrac{1}{4})$.

（Ⅱ）证明：由$h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，得$h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，

$h(x_0)=g(x_0)(m-x_0)-f(m)$.

令函数$H_1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则$H_1'(x)=g'(x)(x-x_0)$.由（Ⅰ）知，当$x\in[1,2]$时，$g'(x)>0$，故当$x\in[1,x_0)$时，$H_1'(x)<0$，$H_1(x)$单调递减；当$x\in(x_0,2]$时，$H_1'(x)>0$，$H_1(x)$单调递增.因

此，当 $x\in[1,x_0)\bigcup(x_0,2]$ 时，$H_1(x)>H_1(x_0)=-f(x_0)=0$，可得 $H_1(m)>0,即h(m)>0$.

令函数 $H_2(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则 $H_2{}'(x)=g(x_0)-g(x)$.由（Ⅰ）知，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H_2{}'(x)>0$，$H_2(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H_2{}'(x)<0$，$H_2(x)$ 单调递减.因此，当 $x\in[1,x_0)\bigcup(x_0,2]$ 时，$H_2(x)<H_2(x_0)=0$，可得 $H_2(m)<0,即h(x_0)<0$.

所以，$h(m)h(x_0)<0$.

（III）证明：对于任意的正整数 p，q，且 $\dfrac{p}{q}\in[1,x_0)\bigcup(x_0,2]$，

令 $m=\dfrac{p}{q}$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$.

由（II）知，当 $m\in[1,x_0)$ 时，$h(x)$ 在区间 (m,x_0) 内有零点；

当 $m\in(x_0,2]$ 时，$h(x)$ 在区间 (x_0,m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个零点，不妨设为 x_1，则 $h(x_1)=g(x_1)(\dfrac{p}{q}-x_0)-f(\dfrac{p}{q})=0$.

由（I）知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $0<g(1)<g(x_1)<g(2)$，

于是 $|\dfrac{p}{q}-x_0|=|\dfrac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}|\geq\dfrac{|f(\frac{p}{q})|}{g(2)}=\dfrac{|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|}{g(2)q^4}$.

因为当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点，而 $\dfrac{p}{q}\neq x_0$，故 $f(\dfrac{p}{q})\neq 0$.

又因为 p，q，a 均为整数，所以 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|$ 是正整数，

从而 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|\geq 1$.

所以 $|\dfrac{p}{q}-x_0|\geq\dfrac{1}{g(2)q^4}$.所以，只要取 $A=g(2)$，就有 $|\dfrac{p}{q}-x_0|\geq\dfrac{1}{Aq^4}$.