

绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

·如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

·棱柱的体积公式 $V = Sh$.

其中 S 表示棱柱的底面面积，

h 表示棱柱的高。

·如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

·球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

其中 R 表示球的半径。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

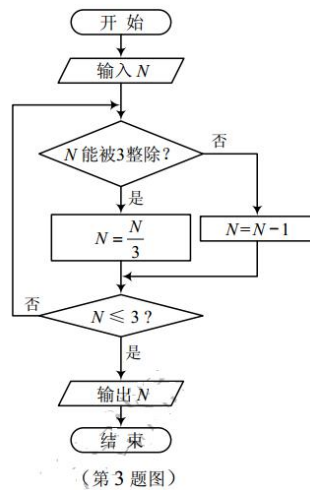
(1) 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$

(A) $\{2\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$ (C) $\{1, 2, 4, 6\}$ (D) $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x + y \geq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0, \\ x \leq 0, \\ y \leq 3, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = x + y$ 的最大值为

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

(3) 阅读右面的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 24, 则输出 N 的值为



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(4) 设 $\theta \in \mathbf{R}$, 则 “ $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12}$ ” 是 “ $\sin \theta < \frac{1}{2}$ ” 的

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\sqrt{2}$. 若经过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ (D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) 已知奇函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-\log_2 5.1)$, $b = g(2^{0.8})$, $c = g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为

(A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$

(7) 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则

(A) $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$ (B) $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$ (C) $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$ (D) $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1, \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则 a 的取值范围是

值范围是

- (A) $[-\frac{47}{16}, 2]$ (B) $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$ (C) $[-2\sqrt{3}, 2]$ (D) $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

第 II 卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共 12 小题, 共 110 分。

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(9) 已知 $a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数, 则 a 的值为 _____.

(10) 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为 _____.

(11) 在极坐标系中, 直线 $4\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) + 1 = 0$ 与圆 $\rho = 2\sin\theta$ 的公共点的个数为 _____.

(12) 若 $a, b \in \mathbf{R}$, $ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 _____.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.

(14) 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有 _____ 个. (用数字作答)

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a > b$, $a = 5, c = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$.

(I) 求 b 和 $\sin A$ 的值;

(II) 求 $\sin(2A + \frac{\pi}{4})$ 的值.

16. (本小题满分 13 分)

从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$

(I) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

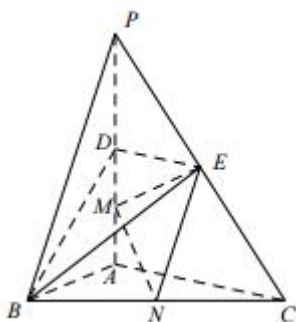
(17) (本小题满分 13 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA=AC=4, AB=2$.

(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 BDE ;

(II) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值;

(III) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长.



18. (本小题满分 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0,

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbf{N}^*$).

(19) (本小题满分 14 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$

的焦点, F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆的方程和抛物线的方程;

(II) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于点 A), 直线 BQ 与 x 轴相交

于点 D . 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AP 的方程.

(20) (本小题满分 14 分)

设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0) < 0$;

(III) 求证: 存在大于 0 的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足

$$\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$