2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学试题参考答案

一、选择题

（1）D　（2）A　（3）B　（4）C　（5）C

（6）D　（7）B　（8）C　（9）A　（10）B

二、填空题

（11）4　（12）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　(13) $2+\frac{\pi}{2}$　（14）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　（15）①④

三、解答题：本大题共6小题，共75分。

（16）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{2})$，

所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x-\cos\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{3}{2}\cos\omega x$

$=\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)$

$=\sqrt{3}(\sin\omega x-\frac{\pi}{3})$

由题设知 $f(\frac{\pi}{6})=0$，

所以 $\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$.

故 $\omega=6k+2$，$k\in Z$，又 $0<\omega<3$，

所以 $\omega=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{12})$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

所以 $x-\frac{\pi}{12}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，

当 $x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}$，

即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

（17）

解：（Ⅰ）因为 $AP\perp BE$，$AB\perp BE$，

AB，$AP\subset$ 平面 ABP，$AB\cap AP=A$，

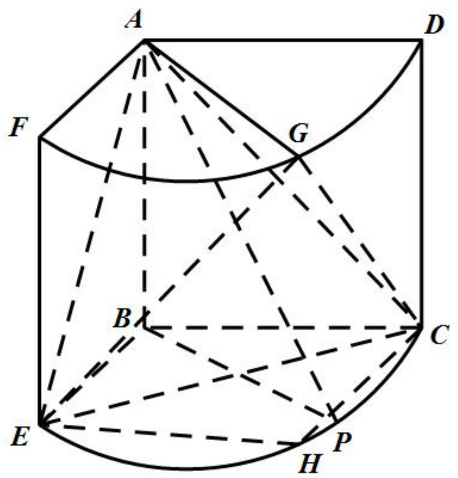
所以 $BE\perp$ 平面 ABP，

又 $BP\subset$ 平面 ABP，

所以 $BE\perp BP$，又 $\angle EBC=120°$，

因此 $\angle CBP=30°$

（Ⅱ）解法一：



取 $\overset{\frown}{EC}$ 的中点 H，连接 EH，GH，CH.

因为 $\angle EBC=120°$，

所以四边形 $BEHC$ 为菱形，

所以 $AE=GE=AC=GC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

取 AG 中点 M，连接 EM，CM，EC.

则 $EM\perp AG$，$CM\perp AG$，

所以$\angle EMC$为所求二面角的平面角.

又$AM=1$，所以$EM=CM=\sqrt{13-1}=2\sqrt{3}$.

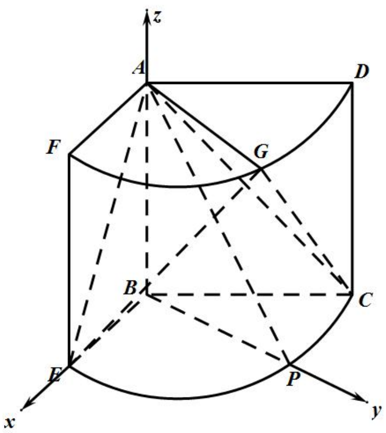
在ΔBEC中，由于$\angle EBC=120^\circ$，

由余弦定理得$EC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ=12$，

所以$EC=2\sqrt{3}$，因此ΔEMC为等边三角形，

故所求的角为60°.

解法二：



以B为坐标原点，分别以BE，BP，BA所在的直线为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

由题意得$A(0,0,3)$ $E(2,0,0)$，$G(1,\sqrt{3},3)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，故$\overrightarrow{AE}=(2,0,-3)$，$\overrightarrow{AG}=(1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{CG}=(2,0,3)$，

设$m=(x_1,y_1,z_1)$是平面AEG的一个法向量.

由$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AE}=0\\m\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}2x_1-3z_1=0,\\x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$

取$z_1=2$，可得平面AEG的一个法向量$m(3,-\sqrt{3},2)$.

设$n=(x_2,y_2,z_2)$是平面ACG的一个法向量.

由$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AG}=0\\n\cdot\overrightarrow{CG}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\2x_2+3z_2=0,\end{cases}$

取$z_2=-2$，可得平面ACG的一个法向量$n=(3,-\sqrt{3},-2)$.

所以$\cos < m,n > = \dfrac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \dfrac{1}{2}$.

因此所求的角为$60°$.

（18）

解：（I）记接受甲种心理暗示的志愿者中包含A_1但不包含B_1的事件为M，则$P(M) = \dfrac{C_8^4}{C_{10}^5} = \dfrac{5}{18}$.

(II)由题意知X可取的值为：$0,1,2,3,4$.则

$$P(X=0) = \frac{C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{1}{42},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^4 C_4^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^3 C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^2 C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^1 C_4^4}{C_{10}^5} = \frac{1}{42},$$

因此X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

X的数学期望是

$$EX = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) + 4 \times P(X=4)$$

$$= 0 + 1 \times \frac{5}{21} + 2 \times \frac{10}{21} + 3 \times \frac{5}{21} + 4 \times \frac{1}{42}$$

$$=2$$

（19）

解：(I)设数列$\{x_n\}$的公比为q，由已知$q > 0$.

由题意得$\begin{cases} x_1 + x_1 q = 3 \\ x_1 q^2 - x_1 q = 2 \end{cases}$，所以$3q^2 - 5q - 2 = 0$，

因为$q > 0$,所以$q = 2, x_1 = 1$，

因此数列$\{x_n\}$的通项公式为$x_n = 2^{n-1}$.

（II）过$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_{n+1}$向$x$轴作垂线，垂足分别为$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_{n+1}$，

由(I)得$x_{n+1} - x_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

记梯形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为b_n.

由题意$b_n = \dfrac{(n+n+1)}{2} \times 2^{n-1} = (2n+1) \times 2^{n-2}$，

所以

$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n$

$= 3 \times 2^{-1} + 5 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + \ldots\ldots + (2n-1) \times 2^{n-3} + (2n+1) \times 2^{n-2}$　　①

又$2T_n = 3 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \ldots\ldots + (2n-1) \times 2^{n-2} + (2n+1) \times 2^{n-1}$　②

①-②得

$-T_n = 3 \times 2^{-1} + (2 \ \ + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1}) - (2n+1) \times 2^{n-1}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1) \times 2^{n-1}$.

所以$T_n = \dfrac{(2n-1) \times 2^n + 1}{2}$.

（20）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意$f(\pi) = \pi^2 - 2$

又$f'(x) = 2x - 2\sin x$，

所以$f'(\pi) = 2\pi$，

因此 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程为

$y-(\pi^2-2)=2\pi(x-\pi)$，

即 $y=2\pi x-\pi^2-2$.

（Ⅱ）由题意得 $h(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$，

因为 $h'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)-a(2x-2\sin x)$

$=2e^x(x-\sin x)-2a(x-\sin x)$

$=2(e^x-a)(x-\sin x)$，

令 $m(x)=x-\sin x$

则 $m'(x)=1-\cos x\ge 0$

所以 $m(x)$ 在 R 上单调递增.

因为 $m(0)=0,$

所以 当 $x>0$ 时，$m(x)>0,$

当 $x<0$ 时，$m(x)<0$

(1)当 $a\le 0$ 时，$e^x-a>0$

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取得极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

(2)当 $a>0$ 时，$h'(x)=2\left(e^x-e^{\ln a}\right)(x-\sin x)$

由 $h'(x)=0$ 得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$

①当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0,h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\ln a,0)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0,h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0,h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以 当 $x=\ln a$ 时 $h(x)$ 取得极大值.

极大值为 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$，

当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取到极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

②当 $a=1$ 时，$\ln a=0$，

所以 当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$h'(x)\geq 0$，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

③当 $a>1$ 时，$\ln a>0$

所以 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

所以 当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取得极大值，极大值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $x=\ln a$ 时 $h(x)$ 取得极小值.

极小值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$.

综上所述：

当 $a\le 0$ 时，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $h(x)$ 有极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(0,\ln a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 有极大值，也有极小值，

极大值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$

极小值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $a=1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 有极大值，也有极小值，

极大值是 $h(0)=-2a-1$；

极小值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$.

（21）

解：（I）由题意知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$2c=2$，

所以 $a=\sqrt{2},b=1$，

因此 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

得 $\left(4{k_1}^2+2\right)x^2-4\sqrt{3}k_1x-1=0$，

由题意知 $\Delta>0$，

且 $x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{3}k_1}{2{k_1}^2+1},x_1x_2=-\dfrac{1}{2\left(2{k_1}^2+1\right)}$，

所以 $\left|AB\right|=\sqrt{1+{k_1}^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{1+{k_1}^2}\sqrt{1+8{k_1}^2}}{1+2{k_1}^2}$.

由题意可知圆 M 的半径 r 为 $\mathrm{r}=\dfrac{2}{3}\left|AB\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{k}_1^2}\sqrt{1+8\mathrm{k}_1^2}}{2\mathrm{k}_1^2+1}$

由题设知 $k_1k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}$

因此直线 OC 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}x$.

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}x,\end{cases}$

得 $x^2=\dfrac{8{k_1}^2}{1+4{k_1}^2},y^2=\dfrac{1}{1+4{k_1}^2}$，

因此 $|OC|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1+8{k_1}^2}{1+4{k_1}^2}}$.

由题意可知 $\sin\dfrac{\angle SOT}{2}=\dfrac{r}{r+|OC|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{|OC|}{r}}$,

而 $\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+8{k_1}^2}{1+4{k_1}^2}}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sqrt{1+{k_1}^2}\sqrt{1+8{k_1}^2}}{2{k_1}^2+1}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\dfrac{1+2{k_1}^2}{\sqrt{1+4{k_1}^2}\sqrt{1+{k_1}^2}}$,

令 $t=1+2{k_1}^2$,

则 $t>1,\dfrac{1}{t}\in(0,1)$,

因此 $\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{3}{2}\dfrac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{-\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}}\geq 1$,

当且仅当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $t=2$ 时等号成立，此时 $k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\sin\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{1}{2}$,

因此 $\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $\angle SOT$ 最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$.

综上所述：$\angle SOT$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，取得最大值时直线 l 的斜率为 $k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.