2017年普通高等学校招生全国统一考试（Ⅱ卷）逐题解析

理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

【题目1】(2017·新课标全国Ⅱ卷理1)1. $\dfrac{3+i}{1+i}=$（　　）

A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$2+i$　　D．$2-i$

【命题意图】本题主要考查复数的四则运算及共轭复数的概念，意在考查学生的运算能力.

【解析】解法一：常规解法

$$\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

解法二：对十法

$\dfrac{3+i}{1+i}$可以拆成两组分式数$\dfrac{3\ 1}{1\ 1}$，运算的结果应为$a+bi$形式，$a=\dfrac{3\times1+1\times1}{1^2+1^2}=2$（分子十字相乘，分母为底层数字平方和），$b=\dfrac{1\times1-3\times1}{1^2+1^2}=-1$（分子对位之积差，分母为底层数字平方和）.

解法三：分离常数法

$$\frac{3+i}{1+i}=\frac{2+1+i}{1+i}=1+\frac{2}{1+i}=1+\frac{(1+i)(1-i)}{1+i}=2-i$$

解法四：参数法

$$\frac{3+i}{1+i}=a+bi\Rightarrow3+i=(a+bi)(1+i)\Rightarrow3+i=(a-b)+(a+b)i\Rightarrow\begin{cases}a-b=3\\a+b=1\end{cases}，解得\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$$

故 $\dfrac{3+i}{1+i}=2-i$

【知识拓展】复数属于新课标必考点，考复数的四则运算的年份较多，复数考点有五：1.复数的几何意义（2016年）；2.复数的四则运算；3.复数的相等的充要条件；4.复数的分类及共轭复数；5.复数的模

【题目2】(2017·新课标全国Ⅱ卷理2)2.设集合$\mathrm{A}=\{1,2,4\}$，$\mathrm{B}=\{x\,|\,x^2-4x+m=0\}$．若$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{1\}$，则$\mathrm{B}=$（　　）

A．$\{1,-3\}$　　B．$\{1,0\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,5\}$

【命题意图】本题主要考查一元二次方程的解法及集合的基本运算，以考查考生的运算能力为目的.

【解析】解法一：常规解法

∵ $A\cap B=\{1\}$ ∴ 1 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的一个根，即 $m=3$，∴ $B=\left\{x\middle|x^2-4x+3=0\right\}$

故 $B=\{1,3\}$

解法二：韦达定理法

∵ $A\cap B=\{1\}$ ∴ 1 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的一个根，∴ 利用伟大定理可知：$x_1+1=4$，解得：

$x_1=3$，故 $B=\{1,3\}$

解法三：排除法

∵集合 B 中的元素必是方程方程 $x^2-4x+m=0$ 的根，∴ $x_1+x_2=4$，从四个选项 A、B、C、D

看只有 C 选项满足题意.

【知识拓展】集合属于新课标必考点，属于函数范畴，常与解方程、求定义域和值域、数集意义相结合，集合考点有二：1.集合间的基本关系；2.集合的基本运算.

【题目 3】(2017·**新课标全国Ⅱ卷理** 3)3.我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯（　　）

A．1 盏　　　　B．3 盏　　　　C．5 盏　　　　D．9 盏

【命题意图】本题主要考查等比数列通向公式 a_n 及其前 n 项和 S_n，以考查考生的运算能力为主目的.

【解析】解法一：常规解法

一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，即 $S_7=381$；相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，即

$q=2$，塔的顶层为 a_1；由等比前 n 项和 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(q\neq1\right)$ 可知：$S_7=\dfrac{a_1\left(1-2^n\right)}{1-2}=381$，解得

$a_1=3$.

解法二：边界效应

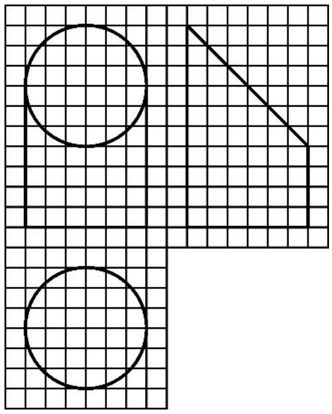
等比数列为递增数列，则有 $a_{n+1}\approx S_n$，∴ $a_8\approx S_7=381$，解得 $a_1=2.9$，∴ $a_1=3$.

【知识拓展】数列属于高考必考考点，一般占 10 分或 12 分，即两道小题或一道大题，其中必有一道小题属于基础题，一道中档偏上题或压轴题，大题在 17 题出现，属于基础题型，高考所占分值较大，在高中教学中列为重点讲解内容，也是大部分学生的难点，主要是平时教学题型难度严重偏离高考考试难度，以及研究题型偏离命题方向，希望能引起注意；考试主线非常明晰，

1.等差数列通向公式 a_n 及其前 n 项和 S_n；2. 等比数列通向公式 a_n 及其前 n 项和 S_n.

【题目 4】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 4)4.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，学 科&网粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分所得，则该几何体的体积为（　　）

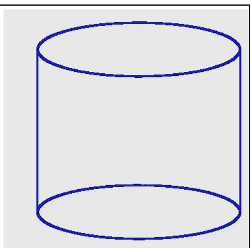
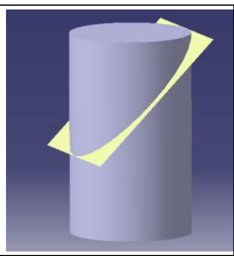
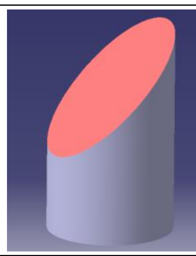
A．90π　　　　B．63π　　　　C．42π　　　　D．36π



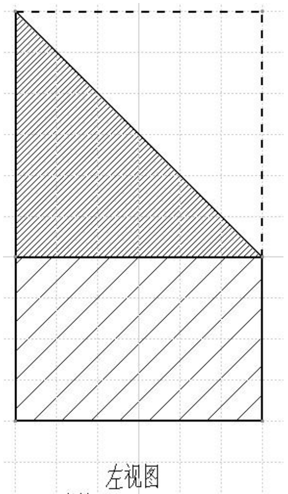
【命题意图】本题主要考查简单几何体三视图及体积，以考查考生的空间想象能力为主目的.

【解析】解法一：常规解法

从三视图可知：一个圆柱被一截面截取一部分而剩余的部分，具体图像如下：

				
切割前圆柱		切割中		切割后几何体

从上图可以清晰的可出剩余几何体形状，该几何体的体积分成两部分，部分图如下：



从左图可知：剩下的体积分上下两部分阴影的体积，下面阴影的体积为$V=Sh$，$r=3$，$h=4$，∴ $V_1=36\pi$；上面阴影的体积V_2是上面部分体积V_3的一半，即$V_2=\frac{1}{2}V_3$，V_3与V_1的比为高的比（同底），即$V_3=\frac{3}{2}V_1$，$V_2=\frac{3}{4}V_1=27\pi$，故总体积$V_0=V_2+V_1=63\pi$.

第二种体积求法：$V_3=Sh=54\pi$，其余同上，故总体积

$V_0=V_2+V_1=63\pi$.

【知识拓展】三视图属于高考必考点，几乎年年考三视图，题型一般有五方面，1.求体积；2.求面积（表面积，侧面积等）；3.求棱长；4.视图本质考查（推断视图，展开图，空间直角坐标系视图）；5.视图与球体综合联立，其中前三个方面考的较多.

【题目 5】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 5)5.设 x， y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值是（　　）

A． -15　　B． -9　　C． 1　　D． 9

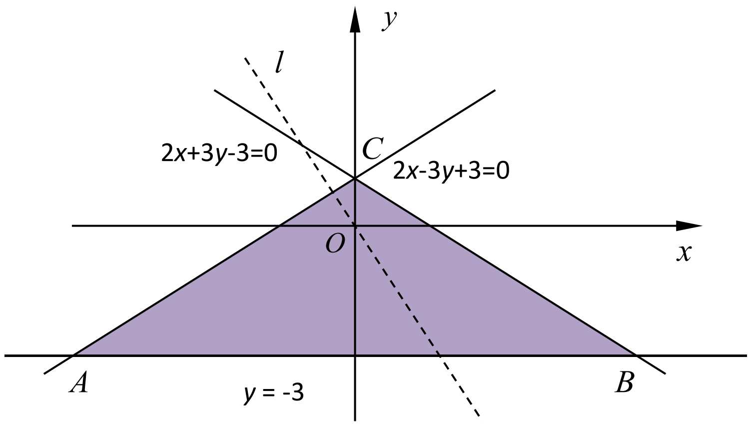
【命题意图】本题主要考查线性规划问题，以考查考生数形结合的数学思想方法运用为目的，属于过渡中档题.

【解析】解法一：常规解法

根据约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$ 画出可行域（图中阴影部分），作直线 $l:2x+y=0$，平移直线 l，

将直线平移到点 A 处 Z 最小，点 A 的坐标为 $(-6,-3)$，将点 A 的坐标代到目标函数 $Z=2x+y$，

可得 $Z=-15$，即 $Z_{\min}=-15$.



解法二：直接求法

对于封闭的可行域，我们可以直接求三条直线的交点，代入目标函数中，三个数种选其最小的为最小值即可，点 A 的坐标为 $(-6,-3)$，点 B 的坐标为 $(6,-3)$，点 C 的坐标为 $(0,1)$，所求值分别为 -15 、 9 、 1，故 $Z_{\min}=-15$， $Z_{\max}=9$.

解法三：隔板法

首先 看约束条件方程的斜率

约束条件方程的斜率分别为 $-\dfrac{2}{3}$ 、 $\dfrac{2}{3}$ 、 0；

其次 排序

按照坐标系位置排序 $-\dfrac{2}{3}$ 、 0 、 $\dfrac{2}{3}$；

再次 看目标函数的斜率和 y 前的系数

看目标函数的斜率和 y 前的系数分别为 -2 、 1；

最后 画初始位置，跳格，找到最小值点

目标函数的斜率在 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ 之间，即为初始位置， y 前的系数为正，则按逆时针旋转，第一格为最大值点，即 $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，第二个格为最小值点，即 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$，只需解斜率为 0 和 $\frac{2}{3}$ 这两条线的交点即可，其实就是点 A，点 A 的坐标为 $(-6,-3)$，将点 A 的坐标代到目标函数 $Z=2x+y$，

可得 $Z=-15$，即 $Z_{\min}=-15$.

【知识拓展】线性规划属于不等式范围，是高考必考考点，常考查数学的数形结合能力，一般变化只在两个方向变化，1.约束条件的变化；2.目标函数的变化；约束条件变化从封闭程度方面变化，目标函数则从方程的几何意义上变化，但此题型属于高考热点题型（已知封闭的约束条件，求已知的二元一次方程目标函数），此题型属于过渡中档题，只需多积累各题型解决的方法即可.

【题目 6】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 6)6.安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有（　　）

A．12 种　　B．18 种　　C．24 种　　D．36 种

【命题意图】本题主要考查基本计数原理的应用，以考查考生的逻辑分析能力和运算求解能力为主.

【解析】解法一：分组分配之分人

首先 分组

将三人分成两组，一组为三个人，有 $A_3^3=6$ 种可能，另外一组从三人在选调一人，有 $C_3^1=3$ 种可能；

其次 排序

两组前后在排序，在对位找工作即可，有 $A_2^2=2$ 种可能；共计有 36 种可能.

解法二：分组分配之分工作

工作分成三份有 $C_4^2=6$ 种可能，在把三组工作分给 3 个人有 $A_3^3=6$ 可能，共计有 36 种可能.

解法三：分组分配之人与工作互动

先让先个人个完成一项工作，有 $A_4^3=24$ 种可能，剩下的一项工作在有 3 人中一人完成有 $C_3^1=3$ 种可能，但由两项工作人数相同，所以要除以 $A_2^2=2$，共计有 36 种可能.

解法四：占位法

其中必有一个完成两项工作，选出此人，让其先占位，即有 $C_3^1\cdot C_4^2=18$ 中可能；剩下的两项工作

由剩下的两个人去完成，即有 $A_2^2=2$ 种可能，按分步计数原理求得结果为 36 种可能.

解法五：隔板法和环桌排列

首先让其环桌排列，在插两个隔板，有 $C_4^2=6$ 种可能，在分配给 3 人工作有 $A_3^3=6$ 种可能，按分

步计数原理求得结果为 36 种可能.

【知识拓展】计数原理属于必考考点，常考题型有 1.排列组合；2.二项式定理，几乎二者是隔一年或隔两年交互出题，排列组合这种排序问题常考，已经属于高考常态，利用二项式定理求某一项的系数或求奇偶项和也已经属于高考常态，尤其是利用二项式定理求某一项的系数更为突出.

【题目 7】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 7)7.甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，学 科&网给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则（　　）

A．乙可以知道四人的成绩　　　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

【命题意图】本题考查推理与证明的有关知识，考查考生推理论证能力.

【解析】解法一：假设法

甲看乙、丙成绩，甲不知道自己的成绩，那么乙、丙成绩中有一人为优，一人为良；乙已经知道自己的成绩要么良，要么优，丙同样也是，当乙看到丙的成绩，一定知道自己的成绩，但是丙一定不知道自己的成绩；而丁同学也知道自己的成绩要么良，要么优，只有看到甲的成绩，才能判断自己的成绩，丁同学也一定知道自己的成绩，故只有乙、丁两位同学知道自己的成绩.

解法二：选项代入法

当我们不知道如何下手, 则从选项入手，一一假定成立，来验证我们的假设是否成立，略

【知识拓展】推理与证明近两年属于热点考题，2016 年的第 15 题（理）、第 16 题（文)，今年的理（7）、文（9)，属于创新题，突出新颖，但题的难度不大，需要考生冷静的思考，抓住主要知识要点，从而能够快速做题，属于中档题.

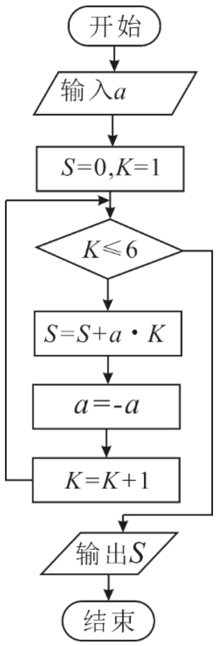
【题目 8】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 8)8.执行右面的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 $S=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【命题意图】本题考查程序框图的知识，意在考查考生对循环结构的理解与应用.

【解析】解法一：常规解法

∵ $S_0=0$，$K_0=1$，$a_0=-1$，$S=S+a\cdot K$，$a=-a$，∴ 执行第一次循环：$S_1=-1$、$a_1=1$、



$K_1=2$；执行第二次循环：$S_2=1$、$a_2=-1$、$K_2=3$；执行第三次循环：$S_3=-2$、

$a_3=1$、

$K_3=4$；执行第四次循环：$S_4=2$、$a_4=-1$、$K_4=5$；执行第五次循环：$S_5=-3$、

$a_5=1$、

$K_5=6$；执行第五次循环：$S_6=3$、$a_6=1$、$K_6=7$；当$K_6=7>6$时，终止循环，输

出$S_6=3$，

故输出值为 3.

解法二：数列法

$S_n=S_{n-1}+\left(-1\right)^n\cdot n$，$K_n=n+1$，裂项相消可得$S_n-S_1=\sum_{i=2}^{n}\left(-1\right)^i\cdot i$；执行第一次循环：

$S_1=-1$、

$a_1=1$、$K_1=2$，当$K_n>6$时，$n=6$即可终止，$S_6+1=2-3+4-5+6=4$，即$S_6=3$，故输出

值为 3.

【题目 9】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 9)9.若双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线被圆$\left(x-2\right)^2+y^2=4$所截得的弦长为 2，则$\mathrm{C}$的离心率为（　　）

A．2　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【命题意图】主要考查双曲线的性质及直线与圆的位置关系，意在考查考生的转化与化归思想.

【解析】解法一：常规解法

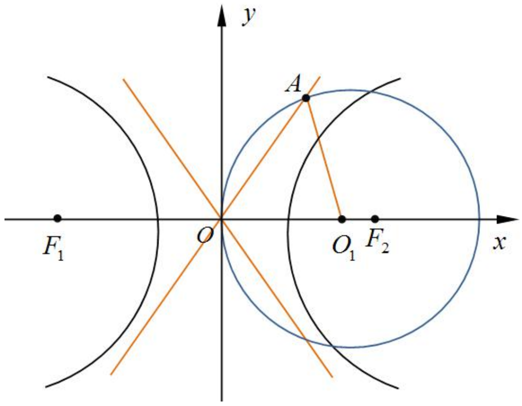
根据双曲线的标准方程可求得渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，根据直线与圆的位置关系可求得圆心到

渐进线的距离为$\sqrt{3}$，$\therefore$ 圆心到渐近线的距离为$\dfrac{\left|2\cdot\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$，即$\dfrac{\left|2\cdot\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}=\sqrt{3}$，解得$e=2$.

解法二：待定系数法

设渐进线的方程为$y=kx$，根据直线与圆的位置关系可求得圆心到渐进线的距离为$\sqrt{3}$，

∴ 圆心到渐近线的距离为$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，即$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，解得$k^2=3$；由于渐近线的斜率与离心率关系为$k^2=e^2-1$，解得$e=2$.



解法三：几何法

从题意可知：$OA=OO_1=O_1A=2$，ΔOO_1A为等边三角形，所以一条渐近线的倾斜较为$\frac{\pi}{3}$，

由于$k=\tan\theta$，可得$k=\sqrt{3}$，

渐近线的斜率与离心率关系为$k^2=e^2-1$，解得$e=2$.

解法四：坐标系转化法

根据圆的直角坐标系方程：$(x-2)^2+y^2=4$，可得极坐标方程$\rho=4\cos\theta$，由$4\cos\theta=2$可得极角$\theta=\frac{\pi}{3}$，从上图可知：渐近线的倾斜角与圆的极坐标方程中的极角相等，所以$k=\sqrt{3}$，

渐近线的斜率与离心率关系为$k^2=e^2-1$，解得$e=2$.

解法五：参数法之直线参数方程

如上图，根据双曲线的标准方程可求得渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，可以表示点A的坐标为$(2\cos\theta,2\sin\theta)$，∵ $\cos\theta=\frac{a}{c}$，$\sin\theta=\frac{b}{c}$ ∴ 点A的坐标为$\left(\frac{2a}{c},\frac{2b}{c}\right)$，代入圆方程中，

解得$e=2$.

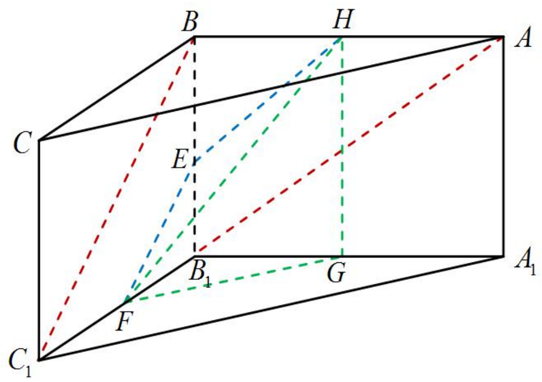
【知识拓展】双曲线已成为高考必考的圆锥曲线内容（理科），一般与三角形、直线与圆、向量相结合，属于中档偏上的题，但随着二卷回归基础的趋势，圆锥曲线小题虽然处于中档题偏上位置，但难度逐年下降.

【题目 10】**(2017·新课标全国Ⅱ卷理 10)**10.已知直三棱柱$\mathrm{ABC-A_1B_1C_1}$中，$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CC_1}=1$，则异面直线$\mathrm{AB_1}$与$\mathrm{BC_1}$所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【命题意图】本题考查立体几何中的异面直线角度的求解，意在考查考生的空间想象能力

【解析】解法一：常规解法

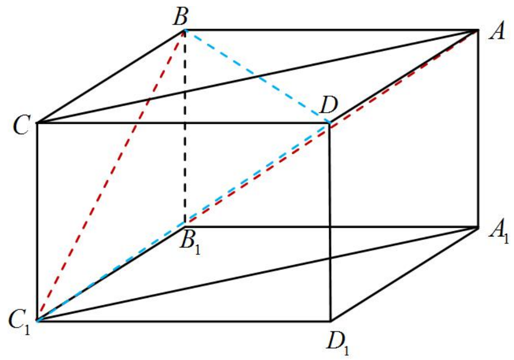


在边 BB_1、B_1C_1、A_1B_1、AB 上分别取中点 E、F、G、H，并相互连接.

由三角形中位线定理和平行线平移功能，异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的夹角为 $\angle FEG$ 或其补角，

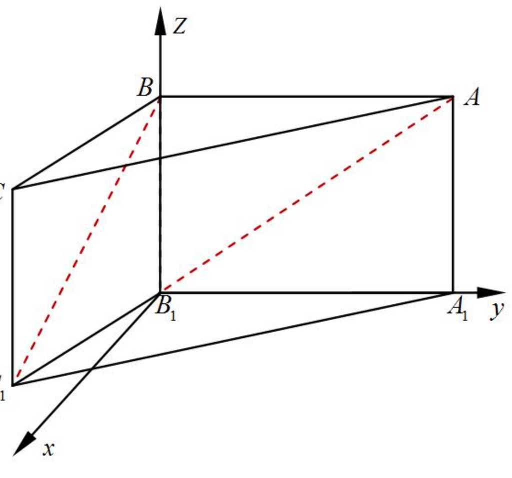
通过几何关系求得 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$FG=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$FH=\frac{\sqrt{11}}{2}$，利用余弦定理可求得异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

解法二：补形



通过补形之后可知：$\angle BC_1D$ 或其补角为异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的角，通过几何关系可知：$BC_1=\sqrt{2}$，$C_1D=\sqrt{5}$，$BD=\sqrt{3}$，由勾股定理或余弦定理可得异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

解法三：建系

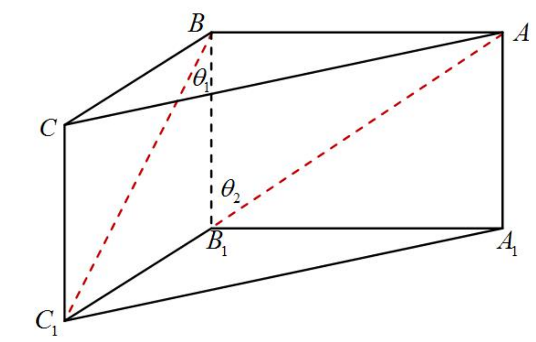


建立如左图的空间直角坐标系，$A(0,2,1)$，$B_1(0,0,0)$，$B(0,0,1)$，$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{BC_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{B_1A}=(0,2,1)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

解法四：投影平移-三垂线定理



设异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的夹角为 θ_3

利用三垂线定理可知：

$$\cos\theta_3=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【知识拓展】立体几何位置关系中角度问题一直是理科的热点问题，也是高频考点，证明的方法大体有两个方向：1.几何法；2.建系；几何法步骤简洁，但不易想到；建系容易想到，但计算量偏大，平时复习应注意各方法优势和不足，做到胸有成竹，方能事半功倍.

【题目 11】**(2017·新课标全国Ⅱ卷理 11)**11.若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为（　　）

A. -1　　　　B. $-2e^{-3}$　　　　C. $5e^{-3}$　　　　D.1

【命题意图】本题主要考查导数的极值概念及其极大值与极小值判定条件，意在考查考生的运算求解能力.

【解析】解法一：常规解法

$\because$ $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ $\therefore$ 导函数 $f'(x)=\left[x^2+(a+2)x+a-1\right]e^{x-1}$

$\because$ $f'(-2)=0$ $\therefore$ $a=-1$

$\therefore$ 导函数 $f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$

令 $f'(x)=0$，$\therefore$ $x_1=-2$，$x_1=1$

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 随变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

从上表可知：极小值为 $f(1)=-1$.

【知识拓展】导数是高考重点考查的对象，极值点的问题是非常重要考点之一，大题、小题都会考查，属于压轴题，但难度在逐年降低.

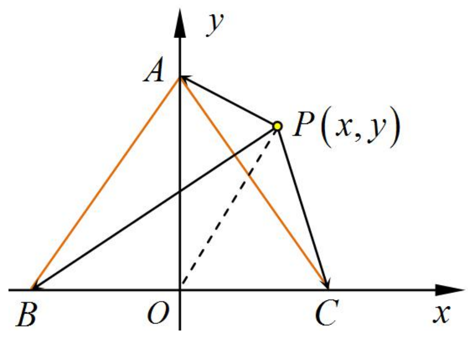
【题目 12】**(2017·新课标全国Ⅱ卷理 12)**12.已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是（　　）

A. -2　　　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　　　D. -1

【命题意图】本题主要考查等边三角形的性质及平面向量的线性运算、数量积，意在考查考生转化与化归思想和运算求解能力

【解析】解法一：建系法

	连接 OP ，$\overrightarrow{OA}=\left(0,\sqrt{3}\right)$ ，$\overrightarrow{OB}=\left(-1,0\right)$ ，$\overrightarrow{OC}=\left(1,0\right)$. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$ ，$\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=\left(-x,-y\right)\cdot\left(-x,\sqrt{3}-y\right)$ $\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=x^2+y^2-\sqrt{3}y=x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$ $\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\ge-\dfrac{3}{4}$ ，$\therefore$ $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\ge-\dfrac{3}{2}$ $\therefore$最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

解法二：均值法

$\because \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$ ，$\therefore$ $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}$

由上图可知：$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PO}$ ；两边平方可得 $3=\left(\overrightarrow{PA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}\right)^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}$

$\because$ $\left(\overrightarrow{PA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}\right)^2\ge-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}$ ，$\therefore$ $2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\ge-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\ge-\dfrac{3}{2}$ ，$\therefore$最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

解法三：配凑法

$\because \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$

$$\therefore\ \overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}\right)^2-\left(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PA}\right)^2}{2}=\frac{\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}\right)^2-\left(\overrightarrow{AO}\right)^2}{2}\ge-\frac{3}{2}$$

$\therefore$最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

【知识拓展】三角形与向量结合的题属于高考经典题，一般在压轴题出现，解决此类问题的通法就是建系法，比较直接，易想，但有时计算量偏大.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

【题目 13】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 13)13.一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 $\mathrm{DX}=$ ________.

【命题意图】本题考查二项分布概念及其数字特征，意在考查学生的运算求解能力.

【解析】解法一：一般解法

随机变量 $X \backsim B(100,0.02)$，$D(X)=np(1-p)=1.96$

【知识拓展】离散型随机变量是高考考点之一，随机变量分布是热点话题，正态分布和二项分布都以小题出现，且在基础题位置，难度较低，在平时复习时不宜研究难题.

【题目 14】(2017·**新课标全国Ⅱ卷理** 14)14.函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$（$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）的最大值是__________.

【命题意图】本题考查三角函数同角基本关系及函数性质—最值，意在考查考生转化与化归思想和运算求解能力

【解析】解法一：换元法

$\because\ f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\therefore\ f(x)=-\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{4}$

设 $t=\cos x$，$t\in[0,1]$，$\therefore\ f(x)=-t^2+\sqrt{3}t+\frac{1}{4}$

函数对称轴为 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\in[0,1]$，$\therefore\ f(x)_{\max}=1$

【知识拓展】此类问题属于热点题型，2016 年二卷（文 11）、2010 年和 2014 广西卷均出现此题型，解决方法相同，但二卷近几年不会再出了.

【题目 15】(2017·**新课标全国Ⅱ卷理** 15)15.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$__________.

【命题意图】本题主要考查等差数列通向公式 a_n 及其前 n 项和以及叠加法求和，

【解析】解法一：常规解法

$\because\ S_4=10$，$a_2+a_3=a_1+a_4$，$\therefore\ a_2+a_3=5$

$\because\ a_3=3$，$\therefore\ a_2=2\ \ \therefore\ a_n=n$

$\because\ S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\quad\therefore\quad S_n=\frac{2}{n(n+1)}\ \ \therefore\ \frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_n}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

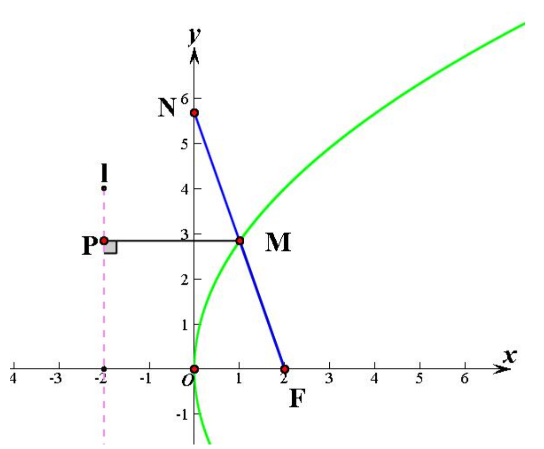
∴ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1},n\in N^*$

【知识拓展】本题不难，属于考查基础概念，但有一部分考生会丢掉$n\in N^*$这个条件，此处属于易错点.

【题目 16】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 16)16.已知F是抛物线C：$y^2=8x$的焦点，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N．若M为FN的中点，则$|\text{FN}|=$____________.

【命题意图】本题主要考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系，意在考查考生的转化与化归思想运算求解的能力

【解析】解法一：几何法



∵ 点M为线段NF的中点

∴ $x_M=1$

∴ $MF=x_M+2=3$

∴ $NF=2MF=6$

【知识拓展】本题从抛物线定义入手，定比分点求坐标，这是基础概念题，课本习题常有练习.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、解答过程或演算步骤。第 17~21 题为必做题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

【题目 17】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 17)17.（12 分）

ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c ,已知$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1)求$\cos B$

(2)若$a+c=6$ ，ΔABC面积为 2,求b.

【命题意图】本题考查三角恒等变形，解三角形.

【试题分析】在第（Ⅰ）中，利用三角形内角和定理可知$A+C=\pi-B$，将$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$转化为角$B$的方程，思维方向有两个：①利用降幂公式化简$\sin^2\frac{B}{2}$，结合$\sin^2 B+\cos^2 B=1$求出$\cos B$；②利用二倍角公式，化简$\sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$，两边约去$\sin\frac{B}{2}$，求得$\tan\frac{B}{2}$，进而求得$\cos B$.在第（Ⅱ）中，利用（Ⅰ）中结论，利用勾股定理和面积公式求出$a+c$、ac，从而求出b.

（Ⅰ）

【基本解法 1】

由题设及 $A+B+C=\pi, \sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$，故

$$\sin B=4(1\text{-}\cos B)$$

上式两边平方，整理得 $17\cos^2 B-32\cos B+15=0$

解得 $\cos B=1$（舍去），$\cos B=\frac{15}{17}$

【基本解法 2】

由题设及 $A+B+C=\pi, \sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$，所以 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=8\sin^2\frac{B}{2}$，又 $\sin\frac{B}{2}\neq 0$，所以 $\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{4}$，$\cos B=\frac{1-\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}=\frac{15}{17}$

（Ⅱ）由 $\cos B=\frac{15}{17}$ 得 $\sin B=\frac{8}{17}$，故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{4}{17}ac$

又 $S_{\Delta ABC}=2$，则 $ac=\frac{17}{2}$

由余弦定理及 $a+c=6$ 得

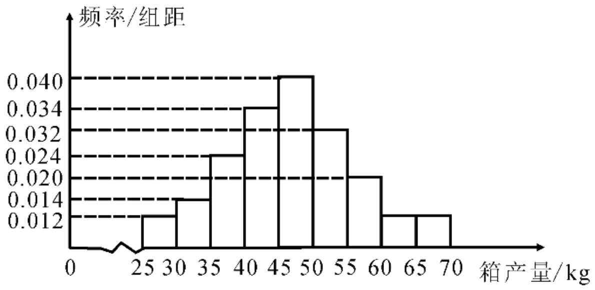
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$$
$$=36-2\times\frac{17}{2}\times(1+\frac{15}{17})$$
$$=4$$

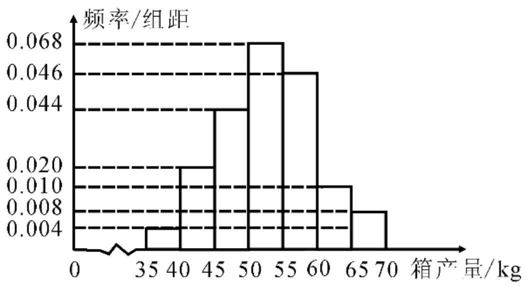
所以 b=2

【知识拓展】解三角形问题是高考高频考点，命题大多放在解答题的第一题，主要利用三角形的内角和定理，正、余弦定理、三角形面积公式等知识解题，解题时要灵活利用三角形的边角关系进行“边转角”“角转边”，另外要注意 $a+c, ac, a^2+c^2$ 三者的关系，这样的题目小而活，备受老师和学生的欢迎.

【题目 18】(2017·新课标全国Ⅱ卷理 18)18.（12 分）

淡水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比学|科网，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg）某频率直方图如下：





（1） 设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件：旧养殖法的箱产量低于 50kg, 新养殖法的箱产量不低于 50kg,估计 A 的概率；

（2） 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3） 根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【命题意图】概率统计, 独立检验等知识的综合运用

【基本解法】

（Ⅰ）旧养殖法的箱产量低于 50kg 的频率为 0.012×5+0.014×5+0.024×5+0.034×5+0.040×5=0.62，由于两种养殖方法的箱产量相互独立，

于是 P（A）=0.62×0.66=0.4092

（Ⅱ）旧养殖法的箱产量低于 50kg 的有 100×0.62=62 箱，不低于 50kg 的有 38 箱，新养殖法的箱产量不低于 50kg 的有 100×0.66=66 箱，低于 50kg 的有 34 箱，得到 2×2 列联表如下：

	箱产量<50kg	箱产量≥50kg	合计
旧养殖法	62	38	100
新养殖法	34	66	100
合计	96	104	200

所以

$$K^2=\frac{200\times(62\times66-34\times38)^2}{96\times104\times100\times100}=\frac{1225}{78}\approx15.705$$

$\therefore K^2>6.635$，所以有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关。

（III）根据箱产量的频率分布直方图，新养殖法的箱产量不低于 50kg 的频率为 0.038×5+0.046×5+0.010×5+0.008×5=0.66>0.50，不低于 55kg 的频率为 0.046×5+0.010×5+0.008×5=0.32<0.50，于是新养殖法箱产量的中位数介于 50kg 到 55kg 之间，设新养殖法箱产量的中位数为 x，则有

（55-x）×0.068+0.046×5+0.010×5+0.008×5=0.50

解得 x=52. 3529

因此，新养殖法箱产量的中位数的估计值 52. 35。

【知识拓展】首先，先表示事件，再写出其发生的概率，将未知事件用已知事件表示，依据事件间的关系，求出未知事件的概率.统计的基本原理是用样本估计总体.独立性检验，先填 2*2 列联表，再计算K^2，与参考值比较，作出结论；中位数的计算要根据中位数以左其频率和为 50%.求面积和计算频率.

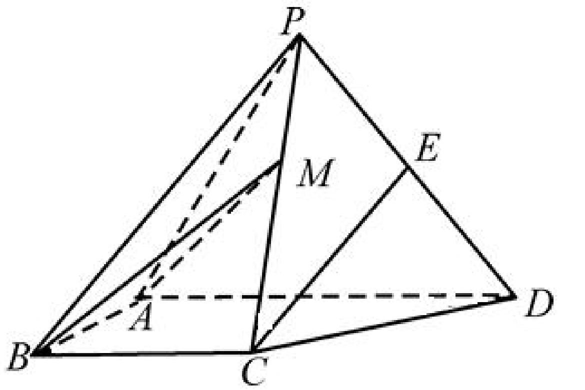
【题目 19】(2017・新课标全国Ⅱ卷理 19)19.（12 分）

如图，四棱锥 *P-ABCD* 中，侧面 *PAD* 为等比三角形且垂直于底面 *ABCD*，

$AB=BC=\frac{1}{2}AD,\angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$，*E* 是 *PD* 的中点.

（1）证明：直线 $CE//$ 平面 *PAB*

（2）点 *M* 在棱 *PC* 上，且直线 *BM* 与底面 *ABCD* 所成锐角为 45° ，求二面角 *M-AB-D* 的余弦值



【命题意图】线面平行的判定，线面垂直的判定，面面垂直的性质，线面角、二面角的求解

【标准答案】（1）证明略；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【基本解法 1】

（1）证明：取 PA 中点为 F ，连接 EF 、 AF

因为 $\angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$， $BC=\dfrac{1}{2}AD$ 所以 $BC \underline{\mathbin{/\!/}} \dfrac{1}{2}AD$

因为 E 是 PD 的中点，所以 $EF \underline{\mathbin{/\!/}} \dfrac{1}{2}AD$，所以 $EF \underline{\mathbin{/\!/}} BC$

所以四边形 $EFBC$ 为平行四边形，所以 $EC//BF$

因为 $BF\subset$平面 PAB， $EC\not\subset$平面 PAB

所以直线 $CE//$平面 PAB

（2）取 AD 中点为 O，连接 OC、OP

因为$\triangle PAD$ 为等边三角形，所以 $PO\perp AD$

因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$， $PO\subset$平面 PAD

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$

因为 $AO \underline{\mathbin{/\!/}} BC$，所以四边形 $OABC$ 为平行四边形，所以 $AB//OC$

所以 $OC\perp AD$

以 OC,OD,OP 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图

设 $BC=1$，则 $P(0,0,\sqrt{3}),A(0,-1,0),B(1,-1,0),C(1,0,0)$ ，所以 $\overrightarrow{PC}=(1,0,-\sqrt{3})$

设 $M(x,y,z)$ ，则 $\overrightarrow{PM}=(x,y,z-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$

因为点 M 在棱 PC 上，所以 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\le\lambda\le1)$ ，即 $(x,y,z-\sqrt{3})=\lambda(1,0,-\sqrt{3})$

所以 $M(\lambda,0,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$ ，所以 $\overrightarrow{BM}=(\lambda-1,1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$

因为直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°，

所以 $|\sin45^{\circ}|=|\cos<\overrightarrow{BM},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BM}||\vec{n}|}=\dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+1^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $\lambda=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{BM}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,-\dfrac{\sqrt{6}}{2})$

设平面 MAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$ ，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}=x=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\vec{m}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y-\dfrac{\sqrt{6}}{2}z=0\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\vec{m}=(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2},1)$

所以 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\dfrac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

所以求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【基本解法 2】

（1）证明：取 AD 中点为 O，连接 OC、OE

因为 $\angle BAD=\angle ABC=90°$，$BC=\dfrac{1}{2}AD$ 所以 $BC \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} \dfrac{1}{2}AD$，即 $BC \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} AO$

所以四边形 $OABC$ 为平行四边形，所以 $OC//AB$

因为 $AB\subset$ 平面 PAB，$OC\not\subset$ 平面 PAB

所以直线 $OC//$ 平面 PAB

因为 E 是 PD 的中点，所以 $OE//PA$

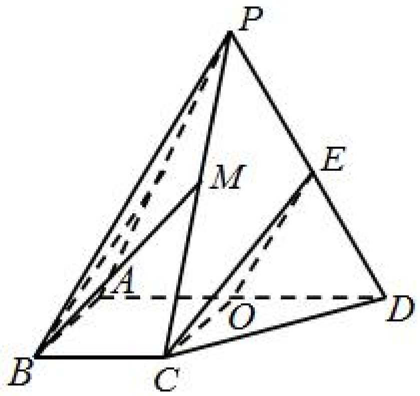
因为 $PA\subset$ 平面 PAB，$OE\not\subset$ 平面 PAB

所以直线 $PA//$ 平面 PAB

因为 $PA\bigcap AB=A$，所以平面 $OCE//$ 平面 PAB

因为 $CE\subset$ 平面 PAB

所以直线 $CE//$ 平面 PAB



（2）同上

【知识拓展】

线面平行的证明一般有两个方向，线面平行的判定或面面平行的性质。

角的求解多借助空间直角坐标系，需要注意两个问题：（1）题中没有现成的三条线两两垂直，需要先证明后建系；（2）$<\vec{m},\vec{n}>$ 是指两个法向量的夹角，与二面角相等或互补，需要观察所求二面角是锐二面角还是钝二面角

【题目 20】(2017・新课标全国Ⅱ卷理 20)20. （12 分）

设 *O* 为坐标原点,动点 *M* 在椭圆 *C*:$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上,过 *M* 做 *x* 轴的垂线,垂足为 *N*,点 *P* 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 *P* 的轨迹方程;

(2) 设点 *Q* 在直线 *x*=-3 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点 *P* 且垂直于 *OQ* 的直线 *l* 过 *C* 的左焦点 *F*.

【命题意图】椭圆，定值问题的探索；运算求解能力

【基本解法】

（Ⅰ）解法一：相关点法求轨迹：

设$M\left(x_0,y_0\right)$，$N\left(x_0,0\right)$，$P\left(x,y\right)$，则：$\overrightarrow{NP}=\left(x-x_0,y\right)$，$\overrightarrow{NM}=\left(0,y_0\right)$.

又$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，所以：$\left(x-x_0,y\right)=\sqrt{2}\left(0,y_0\right)$，则：$x=x_0,y=\sqrt{2}y_0$.

又$M\left(x_0,y_0\right)$在椭圆C上，所以：$\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}=1$。

所以：$x^2+y^2=2$.

解法二：

椭圆C的参数方程为：$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.

设$M\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta\right)$，$N\left(\sqrt{2}\cos\theta,0\right)$，$P\left(x,y\right)$，

则：$\overrightarrow{NP}=\left(x-\sqrt{2}\cos\theta,y\right)$，$\overrightarrow{NM}=\left(0,\sin\theta\right)$.

又$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，所以：$\left(x-\sqrt{2}\cos\theta,y\right)=\sqrt{2}\left(0,\sin\theta\right)$，则：$x=\sqrt{2}\cos\theta,y=\sqrt{2}\sin\theta$.

则：$x^2+y^2=2$.

（Ⅱ）解法一：设$P\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，$Q\left(-3,y_1\right)$，$F\left(-1,0\right)$，则$\overrightarrow{OP}=\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，

$\overrightarrow{OQ}=\left(-3,y_1\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(-3-\sqrt{2}\cos\theta,\mathrm{y}_1-\sqrt{2}\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{PF}=\left(-1-\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta\right)$.

又$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，所以：

$\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)\cdot\left(-3-\sqrt{2}\cos\theta,\mathrm{y}_1-\sqrt{2}\sin\theta\right)=-3\sqrt{2}\cos\theta-2\cos^2\theta+\sqrt{2}y_1\sin\theta-2\sin^2\theta=1$

即：$3\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}y_1\sin\theta=-3$.

那么：$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-1-\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta\right)\cdot\left(-3,\mathrm{y}_1\right)=3+3\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}y\sin\theta=0$.

所以：$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{OQ}$.

即过P垂直于OQ的直线l过椭圆C的左焦点F。

解法二：设$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(-3,y_2\right)$，$F\left(-1,0\right)$，则$\overrightarrow{OP}=\left(x_1,y_1\right)$，$\overrightarrow{OQ}=\left(-3,y_2\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(-3-x_1,y_2-y_1\right)$，

$\overrightarrow{PF}=\left(-1-x_1,-y_1\right)$.

又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$, 所以：

$\left(x_1,y_1\right)\cdot\left(-3-x_1,y_2-y_1\right)=-3x_1-x_1{}^2+y_1y_2-y_1{}^2=1$.

又 $P\left(x_1,y_1\right)$ 在 $x^2+y^2=2$ 上，所以：$3x_1-y_1y_2=-3$.

又 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-1-x_1,-y_1\right)\cdot\left(-3,y_2\right)=3+3x_1-y_1y_2=0$.

所以：$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{OQ}$.

即过 P 垂直于 OQ 的直线 l 过椭圆 C 的左焦点 F 。

【题目 21】(2017・新课标全国Ⅱ卷理 21)21.（12 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geq 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

【命题意图】本题考查函数的极值，导数的应用.

【基本解法】(1)法一.

由题知：$f(x)=x\left(ax-a-\ln x\right)\left(x>0\right)$，且 $f(x)\geq 0$ ，

所以：$a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$.

即当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$a\leq\dfrac{\ln x}{x-1}$；当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$a\geq\dfrac{\ln x}{x-1}$；

当 $x=1$ 时，$a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$ 成立.

令 $g\left(x\right)=x-1-\ln x$，$g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，

$g\left(x\right)$ 递减，$g\left(x\right)<g\left(1\right)=0$，所以：$x-1>\ln x$，即：$\dfrac{\ln x}{x-1}>1$.所以：$a\leq 1$；

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，

$g\left(x\right)$ 递增，$g\left(x\right)>g\left(1\right)=0$，所以：$x-1>\ln x$，即：$\dfrac{\ln x}{x-1}<1$.所以：$a\geq 1$；

综上：$a=1$.

法二.洛必达法则

由题知：$f(x)=x\left(ax-a-\ln x\right)\left(x>0\right)$，且 $f(x)\geq 0$ ，

所以：$a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$.

即当 $x\in(0,1)$ 时，$a\le \dfrac{\ln x}{x-1}$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$a\ge \dfrac{\ln x}{x-1}$；

当 $x=1$ 时，$a(x-1)-\ln x\ge 0$ 成立.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.

令 $h(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$，$h'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$,$h(x)$ 递增，$h(x)<h(1)=0$；

所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(x)>\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$.

所以：$a\le 1$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$,$h(x)$ 递减，$h(x)<h(1)=0$；

所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(x)<\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$.

所以：$a\ge 1$；

故：$a=1$.

（1） 由(1)知：$f(x)=x(x-1-\ln x)$，$f'(x)=2x-2-\ln x$.

设 $\varphi(x)=2x-2-\ln x$，则 $\varphi'(x)=2-\dfrac{1}{x}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 递增.

又 $\varphi(e^{-2})>0$，$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 有唯一零点 x_0，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 有唯一零点 1，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$\varphi(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$.

又 $f'(x)=\varphi(x)$，所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点.

由 $f'(x_0)=0$ 得 $\ln x_0=2(x_0-1)$，故 $f(x_0)=x_0(1-x_0)$.

由 $x_0 \in (0,1)$ 得 $f(x_0) < \frac{1}{4}$.

因为 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的唯一极大值点，由 $e^{-1} \in (0,1)$，$f(e^{-1}) \neq 0$ 得

$f(x_0) > f(e^{-1}) = e^{-2}$

所以 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，按所做的第一题计分。

【题目 22】(2017・新课标全国Ⅱ卷理 22)22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 *xOy* 中，以坐标原点为极点，*x* 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta = 4$.

（1）*M* 为曲线 C_1 上的动点，点 *P* 在线段 *OM* 上，且满足 $|OM|\cdot|OP| = 16$,求点 *P* 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 *A* 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$，点 *B* 在曲线 C_2 上，求 ΔOAB 面积的最大值.

【命题意图】坐标系与参数方程，求动点的轨迹方程，三角函数

【基本解法】（1）解法一：设 P 点在极坐标下坐标为 (ρ, θ)

由 $|OM|\cdot|OP| = 16$ 可得 M 点的坐标为 $\left(\frac{16}{\rho}, \theta\right)$，代入曲线 C_1 的极坐标方程，得：

$\frac{16}{\rho}\cos\theta = 4$，即 $\rho = 4\cos\theta$，两边同乘以 ρ，化成直角坐标方程为：

$x^2 + y^2 = 4x$，由题意知 $\rho > 0$，所以检验得 $x^2 + y^2 = 4x (x \neq 0)$.

解法二：设 P 点在直角坐标系下坐标为 (x, y)，曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x = 4$，因为 O, P, M 三点共线，所以 M 点的坐标为 $\left(4, \frac{4y}{x}\right)$，代入条件 $|OM|\cdot|OP| = 16$ 得：

$\sqrt{16 + \frac{16y^2}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 16$，因为 $x > 0$，化简得：

$x^2 + y^2 = 4x (x \neq 0)$.

（2）解法一：由（1）知曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$，故可设 B 点坐标为 $(4\cos\theta, \theta)$，

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cos\theta\cdot\left|\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\right|=\left|2\sqrt{3}\cos\theta^2-2\sin\theta\cos\theta\right|=\left|\sqrt{3}\cos 2\theta-\sin 2\theta+\sqrt{3}\right|$$

$$=\left|-2\sin(2\theta-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\right|$$

由$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$得$S_{\Delta OAB}\le 2+\sqrt{3}$，即最大值为$2+\sqrt{3}$.

解法二：在直角坐标系中，A点坐标为$(1,\sqrt{3})$，直线OA的方程为$\sqrt{3}x-y=0$.

设点B点坐标(x,y)，则点B到直线OA的距离$d=\frac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$

所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot d=\frac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$，又因为点$B$坐标满足方程$(x-2)^2+y^2=4$，由柯西不等式得：

$\left[(x-2)^2+y^2\right]\left[\sqrt{3}^2+(-1)^2\right]\ge\left[\sqrt{3}(x-2)-y\right]^2$，即$-4\le\sqrt{3}(x-2)-y\le 4$

即$-4+2\sqrt{3}\le\sqrt{3}x-y\le 4+2\sqrt{3}$

由$S_{\Delta OAB}=\frac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$得，$S_{\Delta OAB}\le 2+2\sqrt{3}$.

解法三：前面同解法二，

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot d=\frac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$，又因为点$B$坐标满足方程$(x-2)^2+y^2=4$，故可设

B的坐标$(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，即

$$S_{\Delta OAB}=\frac{\left|2\sqrt{3}\cos\alpha+2\sqrt{3}-2\sin\alpha\right|}{2}=\frac{\left|-4\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}\right|}{2}\le 2+\sqrt{3}.$$

解法四：圆心为$C(2,0)$，点$A(1,\sqrt{3})$在圆$(x-2)^2+y^2=4$上，记C到OA的距离为d，

直线OA的方程为$\sqrt{3}x-y=0$，则$d=\sqrt{3}$，不难得到:

$S_{\Delta OAB}\le\frac{1}{2}OA\cdot(d+r)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+2)=2+\sqrt{3}$.

【题目 23】(2017・新课标全国Ⅱ卷理 23)23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知$a>0,b>0,a^3+b^3=2$，证明：

（1）$(a+b)(a^3+b^3)\ge 4$；

（2）$a+b\le 2$．

【命题意图】不等式证明，柯西不等式

【基本解法】（1）解法一：由柯西不等式得：

$$(a+b)(a^5+b^5)=\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\right]\cdot\left[(\sqrt{a}\cdot a^2)^2+(\sqrt{b}\cdot b^2)^2\right]\ge (a^3+b^3)^2=4$$

解法二：$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+b^6+ab^5+a^5b=(a^3+b^3)^2+ab^5+a^5b-2a^3b^3$

$$\ge (a^3+b^3)^2+2\sqrt{a^6b^6}-2a^3b^3=(a^3+b^3)^2=4$$

解法三：$\left(a+b\right)\left(a^5+b^5\right)-4=\left(a+b\right)\left(a^5+b^5\right)-\left(a^3+b^3\right)^2=ab^5+a^5b-2a^3b^3$

又 $a>0,b>0$，所以 $ab^5+a^5b-2a^3b^3=ab\left(a^2-b^2\right)^2\ge 0$．

当 $a=b$ 时，等号成立．

所以，$\left(a+b\right)\left(a^5+b^5\right)-4\ge 0$，即 $(a+b)(a^5+b^5)\ge 4$．

（2）解法一：由 $a^3+b^3=2$ 及 $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$ 得

$$2=(a+b)\cdot(a^2+b^2-ab)=(a+b)\cdot\left[(a+b)^2-3ab\right]$$

$$\ge (a+b)\cdot\left[(a+b)^2-\frac{3(a+b)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{(a+b)^3}{4}$$

所以 $a+b\le 2$．

解法二：（反证法）假设 $a+b>2$，则 $a>2-b$，两边同时立方得：

$a^3>(2-b)^3=8-12b+6b^2-b^3$，

即 $a^3+b^3>8-12b+6b^2$，因为 $a^3+b^3=2$，

所以 $6-12b+6b^2<0$，即

$6(b-1)^2<0$，矛盾，所以假设不成立，

即 $a+b\le 2$．

解法三：因为 $a^3+b^3=2$，

所以：$\left(a+b\right)^3-8=\left(a+b\right)^3-4\left(a^3+b^3\right)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3$

$$=3a^2\left(b-a\right)+3b^2\left(a-b\right)=-3\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2.$$

又 $a>0,b>0$，所以：$-3\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\le 0$。

所以，$\left(a+b\right)^3 \leq 8$，即 $a+b \leq 2$．

解法四：因为 $a^3+1+1 \geq 3\sqrt[3]{a}=3a, b^3+1+1 \geq 3\sqrt[3]{b}=3b$，

所以 $a^3+1+1+b^3+1+1 \geq 3(a+b)$，

即 $6 \geq 3(a+b)$，

即 $a+b \leq 2$（当且仅当 $a=b=1$ 时取等号）．