2015年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．

1．（5分）设集合$M=\{x|-1<x<2\}$，集合$N=\{x|1<x<3\}$，则$M\cup N=$（　　）

A．$\{x|-1<x<3\}$ B．$\{x|-1<x<2\}$ C．$\{x|1<x<3\}$ D．$\{x|1<x<2\}$

【解答】解：根据并集的定义知：$M\cup N=\{x|-1<x<3\}$，

故选：A．

2．（5分）设向量$\vec{a}=(2,4)$与向量$\vec{b}=(x,6)$共线，则实数$x=$（　　）

A．2 B．3 C．4 D．6

【解答】解；因为向量$\vec{a}=(2,4)$与向量$\vec{b}=(x,6)$共线，

所以$4x=2\times6$，解得$x=3$；

故选：B．

3．（5 分）某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异，拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查，则最合理的抽样方法是（　　）

A．抽签法 B．系统抽样法 C．分层抽样法 D．随机数法

【解答】解：我们常用的抽样方法有：简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，

而事先已经了解到三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异，这种方式具有代表性，比较合理．

故选：C．

4．（5 分）设 a，b 为正实数，则"$a>b>1$"是"$\log_2 a>\log_2 b>0$"的（　　）

A．充要条件 B．充分不必要条件

C．必要不充分条件 D．既不充分也不必要条件

【解答】解：若 $\log_2 a>\log_2 b>0$，则 $a>b>1$，

故"$a>b>1$"是"$\log_2 a>\log_2 b>0$"的充要条件，

故选：A．

5．（5 分）下列函数中，最小正周期为π且图象关于原点对称的函数是（　　）

A．$y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$　B．$y=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

C．y=sin2x+cos2x D．y=sinx+cosx

【解答】解：

$y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})=-\sin 2x$，是奇函数，函数的周期为：π，满足题意，所以 A 正确

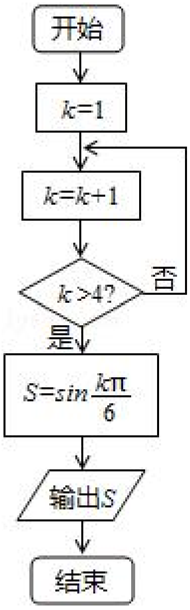
$y=\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\cos 2x$，函数是偶函数，周期为：π，不满足题意，所以 B 不正确；

$y=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，函数是非奇非偶函数，周期为π，所以 C 不正确；

$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，函数是非奇非偶函数，周期为 2π，所以 D 不正确；

故选：A．

6．（5 分）执行如图所示的程序框图，输出 s 的值为（　　）



A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C．$-\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{2}$

【解答】解：模拟执行程序框图，可得

k=1

k=2

不满足条件 k＞4，k=3

不满足条件 k＞4，k=4

不满足条件 k＞4，k=5

满足条件 k＞4，S=sin $\frac{5\pi}{6}$ = $\frac{1}{2}$ ，

输出 S 的值为 $\frac{1}{2}$ ．

故选：D．

7．（5 分）过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，交该双曲线的两条渐近线于 A、B 两点，则|AB|=（　　）

A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　B．2$\sqrt{3}$　C．6 D．4$\sqrt{3}$

【解答】解：双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点（2，0），渐近线方程为 y=$\pm\sqrt{3}x$ ，

过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，x=2，

可得 $y_A=2\sqrt{3}$ ，$y_B=-2\sqrt{3}$ ，

∴|AB|=4$\sqrt{3}$ ．

故选：D．

8．（5 分）某食品保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=e^{kx+b}$ （e=2.718…为自然对数的底数，k，b 为常数）．若该食品在 0℃的保鲜时间是 192 小时，在 22℃的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33℃的保鲜时间是（　　）

A．16 小时 B．20 小时 C．24 小时 D．28 小时

【解答】解：$y=e^{kx+b}$ （e=2.718…为自然对数的底数，k，b 为常数）．

当 x=0 时，$e^b=192$，

当 x=22 时 $e^{22k+b}=48$，

$\therefore e^{22k}=\frac{48}{192}=\frac{1}{4}$

$e^{11k}=\frac{1}{2}$

$e^b=192$

当 x=33 时，$e^{33k+b}=(e^k)^{33}\bullet(e^b)=(\frac{1}{2})^3\times192=24$

故选：C

9．（5 分）设实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x+y\leq 10\\ x+2y\leq 14\\ x+y\geq 6\end{cases}$，则 xy 的最大值为（　　）

A．$\frac{25}{2}$　B．$\frac{49}{2}$　C．12 D．16

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图；

由图象知 y≤10 - 2x，

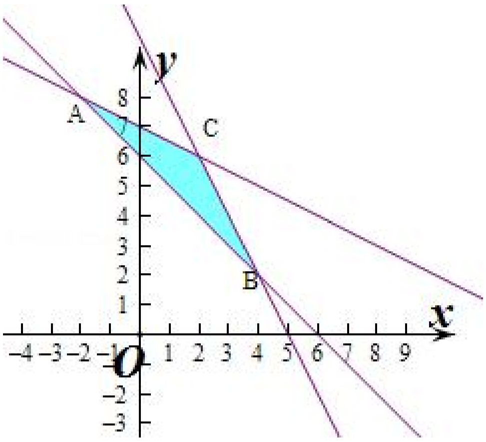
则 xy≤x（10 - 2x）=2x（5 - x））≤2（$\frac{x+5-x}{2}$）^{2}=$\frac{25}{2}$，

当且仅当 x=$\frac{5}{2}$，y=5 时，取等号，

经检验（$\frac{5}{2}$，5）在可行域内，

故 xy 的最大值为 $\frac{25}{2}$，

故选：A



10．（5 分）设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A、B 两点，与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$（$r>0$）相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点，若这样的直线 l 恰有 4 条，则 r 的取值范围是（　　）

A．（1，3）　B．（1，4）　C．（2，3）　D．（2，4）

【解答】解：设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），M（x_0，y_0），

斜率存在时，设斜率为 k，则 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，

则 $\begin{cases} {y_1}^2=4x_1 \\ {y_2}^2=4x_2 \end{cases}$，相减，得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$，

当 l 的斜率存在时，利用点差法可得 $ky_0=2$，

因为直线与圆相切，所以 $\frac{y_0}{x_0-5}=-\frac{1}{k}$，所以 $x_0=3$，

即 M 的轨迹是直线 $x=3$．

将 $x=3$ 代入 $y^2=4x$，得 $y^2=12$，∴ $-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}$，

∵M 在圆上，∴ $(x_0-5)^2+y_0^2=r^2$，∴$r^2=y_0^2+4<12+4=16$，

∵直线 l 恰有 4 条，∴$y_0\neq0$，∴$4<r^2<16$，

故 $2<r<4$ 时，直线 l 有 2 条；

斜率不存在时，直线 l 有 2 条；

所以直线 l 恰有 4 条，$2<r<4$，

故选：D．

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．（5 分）设 i 是虚数单位，则复数 $i-\frac{1}{i}$ = 2i ．

【解答】解：复数 $i-\frac{1}{i}=i-\frac{i}{i\cdot i}=i+i=2i$．

故答案为：2i．

12．（5 分）$\lg0.01+\log_2 16$ 的值是 2 ．

【解答】解：$\lg 0.01+\log_2 16=-2+4=2$．

故答案为：2．

13．（5 分）已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$的值是 -1 ．

【解答】解：$\because\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，即 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，

$\therefore\tan\alpha=-2$，

则原式

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=$

$\dfrac{-5}{4+1}=-1$，

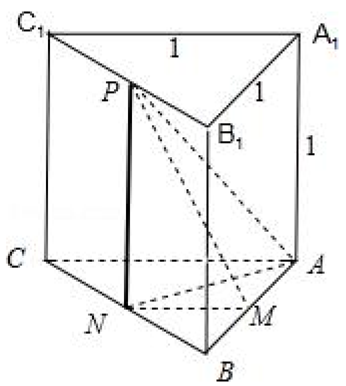
故答案为：-1

14．（5 分）在三棱住 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形，俯视图是直角边长为 1 的等腰直角三角形，设 M，N，P 分别是 AB，BC，B_1C_1 的中点，则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是 $\dfrac{1}{24}$ ．

【解答】解：由三视图可知，可知几何体的图形如图：几何体是底面为等腰直角三角形直角边长为 1，高为 1 的直三棱柱，底面积为 $\frac{1}{2}$ ，所求三棱锥的高为 NP=1，三棱锥底面积是三棱柱底面三角形的 $\frac{1}{4}$ ，

所求三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1$ $=\frac{1}{24}$.

故答案为：$\frac{1}{24}$.



15．（5 分）已知函数 f（x）$=2^x$，g（x）$=x^2+ax$（其中 a∈R）．对于不相等的实数 x_1、x_2，设 $m=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ，$n=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ ．现有如下命题：

①对于任意不相等的实数 x_1、x_2，都有 $m>0$；

②对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1、x_2，都有 $n>0$；

③对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1、x_2，使得 $m=n$；

④对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1、x_2，使得 $m=-n$．

其中的真命题有　①④　（写出所有真命题的序号）．

【解答】解：对于①，由于 $2>1$，由指数函数的单调性可得 f（x）在 R 上递增，

即有 $m>0$，则①正确；

对于②，由二次函数的单调性可得 g（x）在（$-\infty$，$-\frac{a}{2}$）递减，在（$-\frac{a}{2}$，$+\infty$）递增，则 $n>0$ 不恒成立，

则②错误；

对于③，由 $m=n$，可得 $f(x_1)-f(x_2)=g(x_1)-g(x_2)$，即为 $g(x_1)-f(x_1)=g(x_2)-f(x_2)$，

考查函数 $h(x)=x^2+ax-2^x$，$h'(x)=2x+a-2^x\ln 2$，

当 $a\to-\infty$，$h'(x)$ 小于 0，h（x）单调递减，则③错误；

对于④，由 $m=-n$，可得 $f(x_1)-f(x_2)=-[g(x_1)-g(x_2)]$，考查函数 $h(x)=x^2+ax+2^x$，

$h'(x)=2x+a+2^x\ln 2$，对于任意的 a，$h'(x)$ 不恒大于 0 或小于 0，则④正确．

故答案为：①④．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（12 分）设数列$\{a_n\}$（n=1，2，3…）的前 n 项和 S_n，满足 $S_n=2a_n-a_1$，且 a_1，a_2+1，a_3成等差数列．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n．

【解答】解：（Ⅰ）由已知 $S_n=2a_n-a_1$，有

$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$（n≥2），

即 $a_n=2a_{n-1}$（n≥2），

从而 $a_2=2a_1$，$a_3=2a_2=4a_1$．

又因为 a_1，a_2+1，a_3成等差数列，即 $a_1+a_3=2(a_2+1)$

所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$，

解得：$a_1=2$．

所以，数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列．

故 $a_n=2^n$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$．

17．（12 分）一辆小客车上有 5 名座位，其座号为 1，2，3，4，5，乘客 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 的座位号分别为 1，2，3，4，5．他们按照座位号顺序先后上车，乘客 P_1 因身体原因没有坐自己 1 号座位，这时司机要求余下的乘客按以下规则就坐：如果自己的座位空着，就只能坐自己的座位．如果自己的座位已有乘客就坐，就在这 5 个座位的剩余空位中选择座位．

（Ⅰ）若乘客 P_1 坐到了 3 号座位，其他乘客按规则就座，则此时共有 4 种坐法．下表给出其中两种坐法，请填入余下两种坐法（将乘客就坐的座位号填入表中空格处）

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5

	3	2	4	5	1
	3	2	4	1	5
	3	2	5	4	1

（Ⅱ）若乘客 P_1 坐到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐，求乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率．

【解答】解：（Ⅰ）余下两种坐法：

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1
	3	2	4	1	5
	3	2	5	4	1

（Ⅱ）若乘客 P_1 坐到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐，则

所有可能的坐法可用下表表示为

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	2	1	3	4	5
	2	3	1	4	5
	2	3	4	1	5

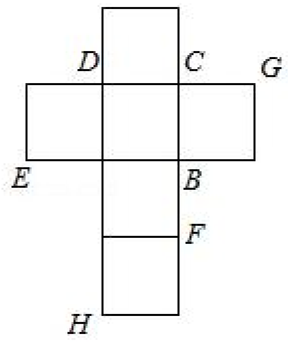
	2	3	4	5	1
	2	3	5	4	1
	2	4	3	1	5
	2	4	3	5	1
	2	5	3	4	1

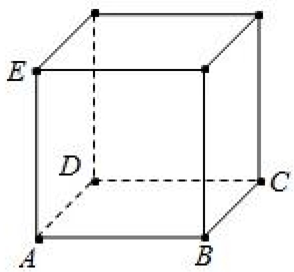
于是，所有可能的坐法共 8 种，

设“乘客 P_5 坐到 5 号座位”为事件 A，则事件 A 中的基本事件的个数为 4，所以 P（A）= $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$.

答：乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率是 $\frac{1}{2}$.

18．（12 分）一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示．





（Ⅰ）请按字母 F，G，H 标记在正方体相应地顶点处（不需要说明理由）

（Ⅱ）判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系．并说明你的结论．

（Ⅲ）证明：直线 DF⊥平面 BEG．

【解答】解：（Ⅰ）点 F，G，H 的位置如图所示．

（Ⅱ）平面 BEG∥平面 ACH，证明如下：

∵ABCD - EFGH 为正方体，

∴BC∥FG，BC=EH，

又 FG∥EH，FG=EH，

∴BC∥EH，BC=EH，

∴BCHE 为平行四边形．

∴BE∥CH，

又 CH⊂平面 ACH，BE⊄平面 ACH，

∴BE∥平面 ACH，

同理 BG∥平面 ACH，

又 BE∩BG=B，

∴平面 BEG∥平面 ACH．

（Ⅲ）连接 FH，

∵ABCD - EFGH 为正方体，

∴DH⊥EG，

又∵EG⊂平面 EFGH，

∴DH⊥EG，

又 EG⊥FH，EG∩FH=O，

∴EG⊥平面 BFHD，

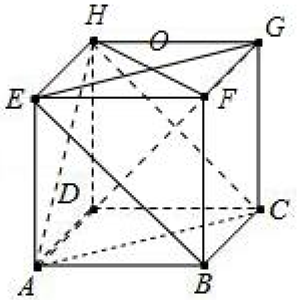
又 DF⊂平面 BFHD，

∴DF⊥EG，

同理 DF⊥BG，

又∵EG∩BG=G，

∴DF⊥平面 BEG．



19．(12 分) 已知 A、B、C 为△ABC 的内角，tanA，tanB 是关于方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0$（p∈R）两个实根．

（Ⅰ）求 C 的大小

（Ⅱ）若 AB=3，AC=$\sqrt{6}$，求 p 的值．

【解答】解：（Ⅰ）由已知，方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0$ 的判别式：△=$(\sqrt{3}p)^2-4(-p+1)=3p^2+4p-4\geq0$，

所以 $p\leq-2$，或 $p\geq\frac{2}{3}$．

由韦达定理，有 tanA+tanB=$-\sqrt{3}p$，tanAtanB=1 - p．

所以，1 - tanAtanB=1 -（1 - p）=p≠0，

从而 $\tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}=-\frac{\sqrt{3}p}{p}=-\sqrt{3}$．

所以 tanC= - tan（A+B）=$\sqrt{3}$，

所以 C=60°．

（Ⅱ）由正弦定理，可得 $\sin B=\frac{AC\sin C}{AB}=\frac{\sqrt{6}\sin 60°}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 B=45°，或 B=135°（舍去）．

于是，A=180° - B - C=75°．

则 tanA=tan75°=tan（45°+30°）

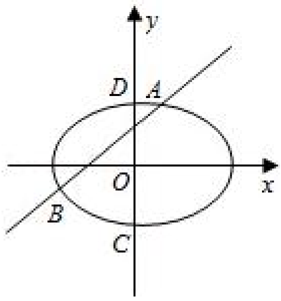
$=\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$．

所以 $p=-\frac{1}{\sqrt{3}}$（tanA+tanB）$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$（2+$\sqrt{3}+1$）= - 1 - $\sqrt{3}$．

20．（13 分）如图，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 P（0，1）在短轴 CD 上，且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 O 为坐标原点，过点 P 的动直线与椭圆交于 A、B 两点．是否存在常数λ，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值？若存在，求λ的值；若不存在，请说明理由．



【解答】解：（Ⅰ）根据题意，可得C（0，-b），D（0，b），

又∵P（0，1），且 $\vec{PC}\cdot\vec{PD}$ =-1，

∴ $\begin{cases}1-b^2=-1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$ ，解得a=2，b= $\sqrt{2}$ ，

∴椭圆E的方程为： $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

（Ⅱ）结论：存在常数λ=1，使得 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\lambda\vec{PA}\cdot\vec{PB}$ 为定值-3．

理由如下：

对直线AB斜率的存在性进行讨论：

①当直线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为y=kx+1，

A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+1\end{cases}$ ，消去y并整理得：（$1+2k^2$）$x^2+4kx-2=0$，

∵△=（4k）^{2}+8（1+$2k^2$）＞0,

∴$x_1+x_2=-\frac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=-\frac{2}{1+2k^2}$，

从而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2+\lambda[x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)]$

$=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$

$=\frac{(-2\lambda-4)k^2+(-2\lambda-1)}{1+2k^2}$

$=-\frac{\lambda-1}{1+2k^2}-\lambda-2$.

∴当λ=1 时，$-\frac{\lambda-1}{1+2k^2}-\lambda-2=-3$,

此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$ 为定值;

②当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 即为直线 CD,

此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-2-1=-3$;

故存在常数λ=1，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 - 3.

21．（14 分）已知函数 $f(x)=-2x\ln x+x^2-2ax+a^2$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）设 g（x）是 f（x）的导函数，讨论 g（x）的单调性；

（Ⅱ）证明：存在 a∈（0，1），使得 f（x）≥0 恒成立，且 f（x）=0 在区间（1，+∞）内有唯一解.

【解答】（I）解：函数 f（x）= - 2xlnx+x^2 - 2ax+a^2，其中 a＞0．可得：x＞0．

g（x）=f′（x）=2（x - 1 - lnx - a），∴g′（x）= $2-\frac{2}{x}$ = $\frac{2(x-1)}{x}$，

当 0＜x＜1 时，g′（x）＜0，函数 g（x）单调递减；

当 1＜x 时，g′（x）＞0，函数 g（x）单调递增.

（II）证明：由 f′（x）=2（x - 1 - lnx - a）=0，解得 a=x - 1 - lnx，

令 u（x）= - 2xlnx+x^2 - 2（x - 1 - lnx）x+（x - 1 - lnx）^{2}=（1+lnx）^{2} - 2xlnx，

则 u（1）=1＞0，u（e）=2（2 - e）＜0，

∴存在 x_0∈（1，e），使得 u（x_0）=0，

令 a_0=x_0 - 1 - lnx_0=v（x_0），其中 v（x）=x - 1 - lnx（x≥1），

由 v′（x）=1 - $\frac{1}{x}$ ≥0，可得：函数 v（x）在区间（1，+∞）上单调递增.

∴0=v（1）＜a_0=v（x_0）＜v（e）=e - 2＜1，即 a_0∈（0，1），当 a=a_0时，

有 f′（x_0）=0，f（x_0）=u（x_0）=0.

再由（I）可知：f′（x）在区间（1，+∞）上单调递增，

当 x∈（1，x_0）时，f′（x）＜0，∴f（x）＞f（x_0）=0；

当 x∈（x_0，+∞）时，f′（x）＞0，∴f（x）＞f（x_0）=0；

又当 x∈（0，1]，f（x）= $(x-a_0)^2$ - 2xlnx＞0．

故当 x∈（0，+∞）时，f（x）≥0 恒成立．

综上所述：存在 a∈（0，1），使得 f（x）≥0 恒成立，且 f（x）=0 在区间（1，+∞）内有唯一解。