

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（文科）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1、设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$ ，集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$ ，则 $A \cup B =$

- (A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$ (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

2、设向量 $a = (2, 4)$ 与向量 $b = (x, 6)$ 共线，则实数 $x =$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

3、某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异，拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查，则最合理的抽样方法是

- (A) 抽签法 (B) 系统抽样法 (C) 分层抽样法 (D) 随机数法

4、设 a, b 为正实数，则 “ $a > b > 1$ ” 是 “ $\log_2 a > \log_2 b > 0$ ” 的

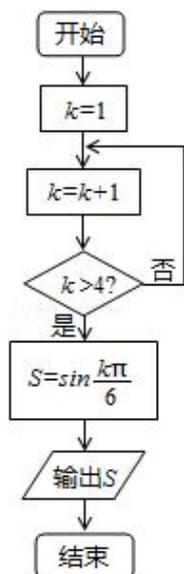
- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

5、下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是

- (A) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ (B) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
(C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$

6、执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$



7、过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线交该双曲线的两条渐近线于 A 、 B 两点，则 $|AB|$ =

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

8、某食品保鲜时间 y (单位：小时)与储藏温度 x (单位： $^{\circ}\text{C}$)满足函数关系 $y = e^{tx}$ ($e = 2.718\dots$ 为自然对数的底数， t, b 为常数)。若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是

- (A) 16 小时 (B) 20 小时 (C) 24 小时 (D) 28 小时

9、设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 14 \\ x + y \geq 6 \end{cases}$ ，则 xy 的最大值为

- (A) $\frac{25}{2}$ (B) $\frac{49}{2}$ (C) 12 (D) 16

10、设直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相较于 A, B 两点，与圆 $(x-5)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切于点 M ，且 M 为线段 AB 中点，若这样的直线 l 恰有 4 条，则 r 的取值范围是

- (A) (1,3) (B) (1,4) (C) (2,3) (D) (2,4)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11、设 i 是虚数单位，则复数 $i - \frac{1}{i} =$ _____.

12、 $\lg 0.01 + \log_2 16 =$ _____.

13、已知 $\sin \alpha + 2\cos \alpha = 0$ ，则 $2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ 的值是 _____.

14、在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC = 90^{\circ}$ ，其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形，俯视图是直角边长为 1 的等腰直角三角形，设点 M, N, P 分别是 AB, BC, B_1C_1 的中点，则三棱锥 $P - A_1MN$ 的体积是 _____.

15、已知函数 $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + ax$ (其中 $a \in \mathbb{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2 ，设 $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ， $n =$

$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$ ，现有如下命题：

- (1) 对于任意不相等的实数 x_1, x_2 ，都有 $m > 0$ ；
- (2) 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2 ，都有 $n > 0$ ；
- (3) 对于任意的 a ，存在不相等的实数 x_1, x_2 ，使得 $m = n$ ；
- (4) 对于任意的 a ，存在不相等的实数 x_1, x_2 ，使得 $m = -n$ 。

其中真命题有 _____ (写出所有真命题的序号)。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16、(本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ ($n=1,2,3,\dots$) 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_3$ ，且 a_1, a_2+1, a_3 成等差数列。

(I) 求数列的通项公式；

(II) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。

17、(本小题满分 12 分)

一辆小客车上有 5 各座位，其座位号为 1,2,3,4,5，乘客 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的座位号分别为 1,2,3,4,5，他们按照座位号顺序先后上车，乘客 P_1 因身体原因没有坐自己的 1 号座位，这时司机要求余下的乘客按以下规则就坐：如果自己的座位空着，就只能坐自己的座位。如果自己的座位已有乘客就坐，就在这 5 个座位的剩余空位中选择座位。

(I) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位，其他乘客按规则就座，则此时共有 4 种坐法。下表给出其中两种坐法，请填入余下两种坐法（将乘客就坐的座位号填入表中空格处）

| 乘客 | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | P_5 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 座位号 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |
| | | | | | |
| | | | | | |

(III) 若乘客 P_1 坐到了 2 号座位，其他乘客按规则就座，求乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率。

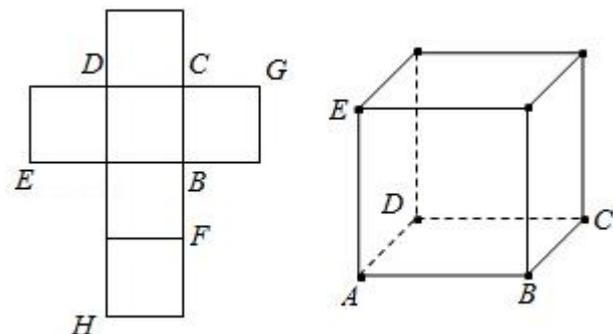
18、(本小题满分 12 分)

一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示。

(I) 请按字母 F,G,H 标记在正方体相应地顶点处（不需要说明理由）

(II) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系。并说明你的结论。

(III) 证明：直线 $DF \perp$ 平面 BEG



19、(本小题满分 12 分)

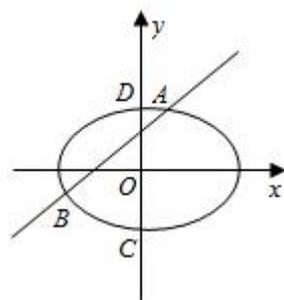
已知 A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的内角， $\tan B$ 是关于方程 $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0$ ($p \in \mathbb{R}$) 两个实根.

- (I) 求 C 的大小
(II) 若 $AB=1$, $AC=\sqrt{6}$, 求 p 的值

20、(本小题满分 13 分)

如图，椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(0, 1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = -1$

- (I) 求椭圆 E 的方程;
(II) 设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A、B 两点。是否存在常数 λ , 使得 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \lambda \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由。



21、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = -2x \ln x + x^2 - 2ax + a^2$, 其中 $a > 0$.

- (I) 设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;
(II) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq g(x)$.

