参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.D　4.A　5.D　6.B　7.C　8.B　9.B　10.D

二、填空题

11. -40　12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　13. 24　14. $\frac{2}{5}$　15. ①④

三、解答题

16.解:

（I）由已知 $S_n = 2a_n - a_1$，有

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$，

即 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$

从而 $a_2 = 2a_1, a_3 = 2a_2 = 4a_1$

又因为 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列，即 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 1).$

所以 $a_1 + 4a_1 = 2(2a_1 + 1)$，解得 $a_1 = 2$

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列

故 $a_n = 2^n$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}$

所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$

由 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$，得 $|1-\frac{1}{2^n}-1|<\frac{1}{1000}$，即 $2^n>1000$

因为 $2^9=256<1000<1024=2^{10}$，

所以 $n\geq 10$

于是，使 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为 10

17.本题主要考查随机事件的概率、古典概型、随机变量的分布列、数学期望等基础知识，考查运算求解能力、应用意识，考查运用概率与统计的只是与方法分析和解决实际问题的能力。

（Ⅰ）由题意，参加集训的男、女生各有 6 名

参赛学生全从 B 中学抽取（等价于 A 中学没有学生入选代表队）的概率为

$$\frac{C_3^3C_4^3}{C_6^3C_6^3}=\frac{1}{100}$$

因此，A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率为 $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

（Ⅱ）根据题意，X 的可能取值为 1,2,3

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\frac{1}{5}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

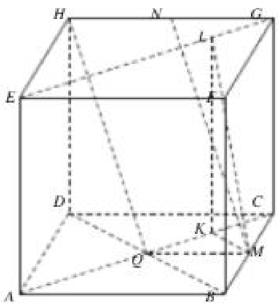
因此，X 的数学期望为

$$E(X)=1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)$$

$$=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$$

18.本题主要考查简单空间图形的直观图、空间线面平行的判定与性质、空间面面夹角的计算等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力。

（Ⅰ）点 F，G，H 的位置如图所示



（Ⅱ）连结 BD，设 O 为 BD 的中点

因为 M,N 分别是 BC,GH 的中点,

所以$OM // CD$，且$OM=\frac{1}{2}CD$，

$HN // CD$，且$HN=\frac{1}{2}CD$

所以$OM // HN, OM=HN$

所以$MNHO$是平行四边形,

从而$MN // OH$

又$MN \not\subset$平面$BDH, OH \subset$平面BDH，

所以$MN //$平面BDH

（Ⅲ）方法一:

连接AC，过M做$MP \perp AC$于P

在正方体$ABCD-EFGH$中，$AC // EG$，

所以$MP \perp EG$

过P作$PK \perp$平面PKM，

从而$KM \perp EG$

所以$\angle PKM$是二面角$A-EG-M$的平面角

设$AD=2$，则$CM=1, PK=2$

在$Rt\Delta CMP$中，$PM=CM\sin 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

在$Rt\Delta PKM$中，$KM=\sqrt{PK^{2}+PM^{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

所以$\cos\angle PKM=\frac{PK}{KM}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

即二面角$A-EG-M$的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

19.本题主要考查二倍角公式、诱导公式、余弦定理、简单的三角恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查函数与方程、化归与转化等数学思想。

（Ⅰ）$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^{2}\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$

（Ⅱ）由$A+C=180^{\circ}$，得$C=180^{\circ}-A, D=180^{\circ}-B$

由（Ⅰ），有

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos(180^{\circ}-A)}{\sin(180^{\circ}-A)}+\frac{1-\cos(180^{\circ}-B)}{\sin(180^{\circ}-B)}$$

$$=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}$$

连接BD，

在ΔABD中，有$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$，

在ΔBCD中，有$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$，

所以$AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=BC^2+CD^2+2BC\cdot CD\cos A$

则$\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BC^2-CD^2}{2(AB\cdot AD+BC\cdot CD)}=\frac{6^2+5^2-3^2-4^2}{2(6\times5+3\times4)}=\frac{3}{7}$

于是$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{3}{7})^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

连接AC，同理可得

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AD^2-CD^2}{2(AB\cdot BC+AD\cdot CD)}=\frac{6^2+3^2-5^2-4^2}{2(6\times3+5\times4)}=\frac{1}{19}$，

于是$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{1}{19})^2}=\frac{6\sqrt{10}}{19}$

所以，$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}$

$$=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}$$

$$=\frac{2\times7}{2\sqrt{10}}+\frac{2\times19}{6\sqrt{10}}$$

$=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

20.本题主要考查椭圆的标准方程与几何性质、直线方程、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合、化归与转化、特殊与一般、分类与整合等数学思想。

（Ⅰ）由已知，点$(\sqrt{2},1)$在椭圆E上

因此$\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \\ a^2-b^2=c^2, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

解得$a=2,b=\sqrt{2}$

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）当直线l与x轴平行时，设直线l与椭圆相交于C,D两点，

如果存在定点Q满足条件，则有$\frac{|QC|}{|QD|}=\frac{|PC|}{|PD|}=1$，即$|QC|=|QD|$

所以Q点在y轴上，可设Q点的坐标为$(0,y_0)$

当直线l与x轴垂直时，设直线l与椭圆相交于M,N两点，

则M,N的坐标分别为$(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})$

由 $\frac{|QM|}{|QN|}=\frac{|PM|}{|PN|}$，有 $\frac{|y_0-\sqrt{2}|}{|y_0+\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$，解得 $y_0=1$，或 $y_0=2$

所以，若存在不同于点 P 的定点 Q 满足条件，则 Q 点坐标只可能为 $(0,2)$

下面证明：对任意直线 l，均有 $\frac{|QA|}{|QB|}=\frac{|PA|}{|PB|}$

当直线 l 的斜率不存在时，由上可知，结论成立。

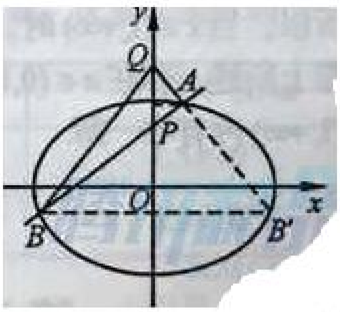
当直线 l 的斜率存在时，可设直线 l 的方程为 $y=kx+1, A, B$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$

其判别式 $\Delta=(4k)^2+8(2k^2+1)>0$，

所以，$x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1}, x_1x_2=-\frac{2}{2k^2+1}$

因此 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2k$



易知，点 B 关于 y 轴对称的点 B' 的坐标为 $(-x_2,y_2)$

又 $k_{QA}=\frac{y_1-2}{x_1}=\frac{kx_1-1}{x_1}=k-\frac{1}{x_1}$，

$k_{QB'}=\frac{y_2-2}{-x_2}=\frac{kx_2-1}{-x_2}=-k+\frac{1}{x_2}=k-\frac{1}{x_1}$，

所以 $k_{QA}=k_{QB'}$，即 Q,A,B' 三点共线

所以 $\frac{|QA|}{|QB|}=\frac{|QA|}{|QB'|}=\frac{|x_1|}{|x_2|}=\frac{|PA|}{|PB|}$

故存在与 P 不同的定点 $Q(0,2)$，使得 $\frac{|QA|}{|QB|}=\frac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立

21.本题主要考查导数的运算、导数在研究函数中的应用、函数的零点等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化等数学思想。

（I）由已知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$g(x)=f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2(1+\frac{a}{x})$，

所以 $g'(x)=2-\frac{2}{x}+\frac{2a}{x^2}=\frac{2(x-\frac{1}{2})^2+2(a-\frac{1}{4})}{x^2}$

当 $0<a<\frac{1}{4}$，$g(x)$ 在区间 $(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}),(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在区间 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减；

当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

（Ⅱ）由 $f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2(1+\frac{a}{x})=0$，解得 $a=\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$

令 $\varphi(x)=-2(x+\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})\ln x+x^2-2(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})x-2(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})^2+\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$

则 $\varphi(1)=1>0,\varphi(e)=-\frac{e(e-2)}{1+e^{-1}}-2(\frac{e-2}{1+e^{-1}})^2<0$

故存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $\varphi(x_0)=0$

令 $a_0=\frac{x_0-1-\ln x_0}{1+x_0^{-1}},u(x)=x-1-\ln x(x\geq 1)$

由 $u'(x)=1-\frac{1}{x}\geq 0$ 知，函数 $u(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增

所以 $0=\frac{u(1)}{1+1}<\frac{u(x_0)}{1+x_0^{-1}}=a_0<\frac{u(e)}{1+e^{-1}}=\frac{e-2}{1+e^{-1}}<1$

即 $a_0\in(0,1)$

当 $a=a_0$ 时，有 $f'(x)=0,f(x_0)=\varphi(x_0)=0$

由（Ⅰ）知，$f'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$

所以，当$x \in (1,+\infty)$时，$f(x) \geq 0$

综上所述，存在$a \in (0,1)$，使得$f(x) \geq 0$在区间$(1,+\infty)$内恒成立，且$f(x)=0$在区间$(1,+\infty)$内有唯一解。