浙江数学（理科）试题

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分.

1.B　2.C　3.C　4.D　5.B　6.A　7.A　8.D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算.多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，满分 16 分.

9.9　10.$\sqrt{2}$,1　11.72,32　12.4,2　13.1,121　14.$\frac{1}{2}$　15. $\frac{1}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

16.本题主要考查三角函数及其变换、正弦和余弦定理等基础知识，同时考查运算求解能力。满分 14 分。

（I）由正弦定理得 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，

故 $2\sin A\cos B=\sin B+\sin\left(A+B\right)=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

于是 $\sin B=\sin\left(A-B\right)$.

又 A，$B\in\left(0,\pi\right)$，故 $0<A-B<\pi$，所以

$B=\pi-\left(A-B\right)$ 或 $B=A-B$，

因此 $A=\pi$（舍去）或 $A=2B$，

所以，$A=2B$.

（II）由 $S=\frac{a^2}{4}$ 得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{4}$，故有

$\sin B\sin C=\frac{1}{2}\sin 2B=\sin B\cos B$，

因 $\sin B\neq 0$，得 $\sin C=\cos B$.

又 B，$C\in\left(0,\pi\right)$，所以 $C=\frac{\pi}{2}\pm B$.

当 $B+C=\frac{\pi}{2}$ 时，$A=\frac{\pi}{2}$；

当 $C-B=\frac{\pi}{2}$ 时，$A=\frac{\pi}{4}$.

综上，$A=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=\frac{\pi}{4}$.

17.本题主要考查空间点、线、面位置关系，二面角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分 15 分。

（I）延长 AD，BE，CF 相交于一点 K，如图所示.

因为平面 BCFE ⊥ 平面 ABC，且 $AC\perp BC$，所以，

$AC\perp$ 平面 BCK，因此，

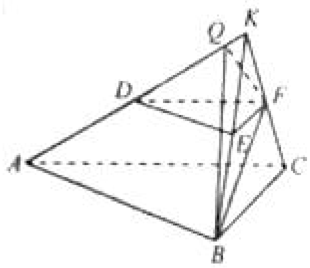
$BF\perp AC$.

又因为 EF//BC，$BE=EF=FC=1$，$BC=2$，所以

ΔBCK 为等边三角形，且 F 为 CK 的中点，则

$BF \perp CK$.

所以 $BF \perp$ 平面 $ACFD$.



（II）方法一：

过点 F 作 $FQ \perp AK$ ，连结 BQ .

因为 $BF \perp$ 平面 ACK ，所以 $BF \perp AK$ ，则 $AK \perp$ 平面 BQF ，所以 $BQ \perp AK$.

所以，$\angle BQF$ 是二面角 $B-AD-F$ 的平面角.

在 $Rt\Delta ACK$ 中， $AC=3$ ， $CK=2$ ，得 $FQ=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

在 $Rt\Delta BQF$ 中， $FQ=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ ， $BF=\sqrt{3}$ ，得 $\cos\angle BQF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

方法二：

如图，延长 AD ， BE ， CF 相交于一点 K ，则 ΔBCK 为等边三角形.

取 BC 的中点 O ，则 $KO \perp BC$ ，又平面 $BCFE \perp$ 平面 ABC ，所以， $KO \perp$ 平面 ABC .

以点 O 为原点，分别以射线 OB ， OK 的方向为 x ， z 的正方向，

建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

由题意得

$B(1,0,0)$ ，$C(-1,0,0)$ ，$K(0,0,\sqrt{3})$ ，

$A(-1,-3,0)$ ，$E\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，$F\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因此，

$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$ ，$\overrightarrow{AK}=(1,3,\sqrt{3})$ ，$\overrightarrow{AB}=(2,3,0)$.

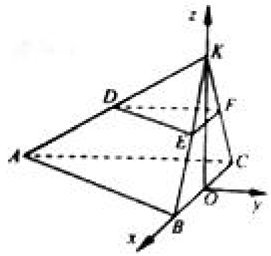
设平面 ACK 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ ，平面 ABK 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}3y_1=0\\ x_1+3y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取$\vec{m}=\left(\sqrt{3},0,-1\right)$；

由$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2x_2+3y_2=0\\ x_2+3y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，取$\vec{n}=\left(3,-2,\sqrt{3}\right)$.

于是，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，二面角$\mathrm{B}-\mathrm{AD}-\mathrm{F}$的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



18.本题主要考查函数的单调性与最值、分段函数、不等式性质等基础知识。同时考查推理论证能力，分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。

（I）由于$a\geq 3$，故

当$x\leq 1$时，$\left(x^2-2ax+4a-2\right)-2|x-1|=x^2+2(a-1)(2-x)>0$，

当$x>1$时，$\left(x^2-2ax+4a-2\right)-2|x-1|=(x-2)(x-2a)$.

所以，使得等式$\mathrm{F}(x)=x^2-2ax+4a-2$成立的$x$的取值范围为

$[2,2a]$.

（II）（i）设函数$f(x)=2|x-1|$，$g(x)=x^2-2ax+4a-2$，则

$f(x)_{\min}=f(1)=0$，$g(x)_{\min}=g(a)=-a^2+4a-2$，

所以，由$\mathrm{F}(x)$的定义知$m(a)=\min\{f(1),g(a)\}$，即

$$m(a)=\begin{cases}0,3\leq a\leq 2+\sqrt{2}\\ -a^2+4a-2,a>2+\sqrt{2}\end{cases}.$$

（ii）当$0\leq x\leq 2$时，

$\mathrm{F}(x)\leq f(x)\leq\max\{f(0),f(2)\}=2=\mathrm{F}(2)$，

当$2\leq x\leq 6$时，

$\mathrm{F}(x)\leq g(x)\leq\max\{g(2),g(6)\}=\max\{2,34-8a\}=\max\{\mathrm{F}(2),\mathrm{F}(6)\}$.

所以，

$$\mathrm{M}(a)=\begin{cases}34-8a,3\le a<4\\2,a\ge 4\end{cases}.$$

19．本题主要考查椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系等基础知识，同时考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力。满分 15 分。

（I）设直线 $y=kx+1$ 被椭圆截得的线段为 AP，由 $\begin{cases}y=kx+1\\\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\end{cases}$ 得

$$\left(1+a^2k^2\right)x^2+2a^2kx=0,$$

故

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}.$$

因此

$$|\mathrm{AP}|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{2a^2|k|}{1+a^2k^2}\cdot\sqrt{1+k^2}.$$

（II）假设圆与椭圆的公共点有 4 个，由对称性可设 y 轴左侧的椭圆上有两个不同的点 P，Q，满足

$$|\mathrm{AP}|=|\mathrm{AQ}|.$$

记直线 AP，AQ 的斜率分别为 k_1，k_2，且 k_1，$k_2>0$，$k_1\ne k_2$.

由（I）知，

$$|\mathrm{AP}|=\frac{2a^2|k_1|\sqrt{1+k_1^2}}{1+a^2k_1^2},\ |\mathrm{AQ}|=\frac{2a^2|k_2|\sqrt{1+k_2^2}}{1+a^2k_2^2},$$

故

$$\frac{2a^2|k_1|\sqrt{1+k_1^2}}{1+a^2k_1^2}=\frac{2a^2|k_2|\sqrt{1+k_2^2}}{1+a^2k_2^2},$$

所以 $\left(k_1^2-k_2^2\right)\left[1+k_1^2+k_2^2+a^2\left(2-a^2\right)k_1^2k_2^2\right]=0$.

由于 $k_1\ne k_2$，k_1，$k_2>0$ 得

$$1+k_1^2+k_2^2+a^2\left(2-a^2\right)k_1^2k_2^2=0,$$

因此

$$\left(\frac{1}{k_1^2}+1\right)\left(\frac{1}{k_2^2}+1\right)=1+a^2\left(a^2-2\right), \qquad ①$$

因为①式关于 k_1，k_2 的方程有解的充要条件是

$$1+a^2\left(a^2-2\right)>1,$$

所以

$$a>\sqrt{2}.$$

因此，任意以点 $\mathrm{A}(0,1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点的充要条件为

$$1<a\le 2,$$

由 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ 得，所求离心率的取值范围为 $0<e\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20.本题主要考查数列的递推关系与单调性、不等式性质等基础知识，同时考查推理论证能力、分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。

（I）由 $\left|a_n-\dfrac{a_{n+1}}{2}\right|\le 1$ 得 $\left|a_n\right|-\dfrac{1}{2}\left|a_{n+1}\right|\le 1$，故

$$\frac{\left|a_n\right|}{2^n}-\frac{\left|a_{n+1}\right|}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^n},\quad n\in\mathrm{N}^*,$$

所以

$$\frac{\left|a_1\right|}{2^1}-\frac{\left|a_n\right|}{2^n}=\left(\frac{\left|a_1\right|}{2^1}-\frac{\left|a_2\right|}{2^2}\right)+\left(\frac{\left|a_2\right|}{2^2}-\frac{\left|a_3\right|}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{\left|a_{n-1}\right|}{2^{n-1}}-\frac{\left|a_n\right|}{2^n}\right)$$

$$\le\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1,$$

因此

$$\left|a_n\right|\ge 2^{n-1}\left(\left|a_1\right|-2\right).$$

（II）任取 $n\in\mathrm{N}^*$，由（I）知，对于任意 $m>n$，

$$\frac{\left|a_n\right|}{2^n}-\frac{\left|a_m\right|}{2^m}=\left(\frac{\left|a_n\right|}{2^n}-\frac{\left|a_{n+1}\right|}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{\left|a_{n+1}\right|}{2^{n+1}}-\frac{\left|a_{n+2}\right|}{2^{n+2}}\right)+\cdots+\left(\frac{\left|a_{m-1}\right|}{2^{m-1}}-\frac{\left|a_m\right|}{2^m}\right)$$

$$\le\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}$$

$$<\frac{1}{2^{n-1}},$$

故

$$|a_n| < \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{|a_m|}{2^m}\right) \cdot 2^n$$

$$\le \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^m\right] \cdot 2^n$$

$$= 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 2^n .$$

从而对于任意 $m > n$，均有

$$|a_n| < 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 2^n .$$

由 m 的任意性得 $|a_n| \le 2$.　　　　　　　　①

否则，存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$，有 $|a_{n_0}| > 2$ ，取正整数 $m_0 > \log_{\frac{3}{4}} \frac{|a_{n_0}| - 2}{2^{n_0}}$ 且 $m_0 > n_0$，则

$$2^{m_0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{m_0} < 2^{n_0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}} \frac{|a_{n_0}|-2}{2^{n_0}}} = |a_{n_0}| - 2 ,$$

与①式矛盾.

综上，对于任意 $n \in \mathrm{N}^*$，均有 $|a_n| \le 2$.