2017年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（理）（北京卷）答案

一、

（1）A　　（2）B　　（3）C　　（4）D

（5）A　　（6）A　　（7）B　　（8）D

二、

（9）2　　（10）1

（11）1　　（12）$-\frac{7}{9}$

（13）$-1,-2,-3$（答案不唯一）　　（14）Q_1　　p_2

三、

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为$\angle A=60^\circ$，$c=\frac{3}{7}a$，

所以由正弦定理得$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

（Ⅱ）因为$a=7$，所以$c=\frac{3}{7}\times 7=3$.

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$得$7^2=b^2+3^2-2b\times 3\times\frac{1}{2}$，

解得$b=8$或$b=-5$（舍）.

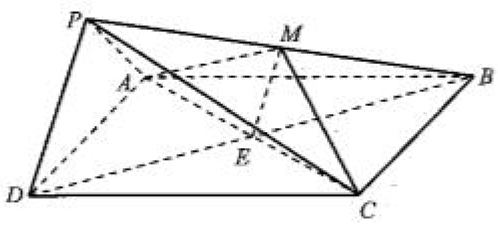
所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

（16）（共14分）

解：(I) 设AC,BD交点为E，连接ME.

因为PD//平面MAC，平面$MAC\cap$平面$PBD=ME$，所以$PD//ME$.

因为$ABCD$是正方形，所以E为BD的中点，所以M为PB的中点.



(II) 取AD的中点O，连接OP，OE.

因为$PA=PD$，所以$OP\perp AD$.

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，且 $OP \subset$ 平面 PAD，所以 $OP \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OE \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OP \perp OE$.

因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $OE \perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$D(2,0,0)$，$B(-2,4,0)$，

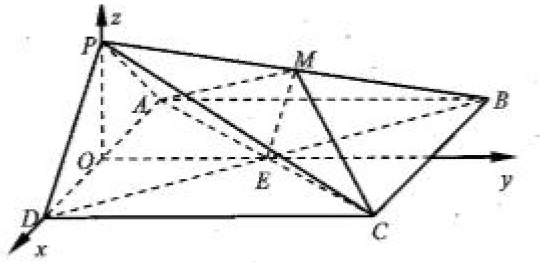
$\overrightarrow{BD}=(4,-4,0)$，$\overrightarrow{PD}=(2,0,-\sqrt{2})$.

设平面 BDP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4x-4y=0\\ 2x-\sqrt{2}z=0\end{cases}$.

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=\sqrt{2}$.于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$.

平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(0,1,0)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=\dfrac{1}{2}$.

由题知二面角 $B-PD-A$ 为锐角，所以它的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.



（III）由题意知 $M(-1,2,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$D(2,4,0)$，$\overrightarrow{MC}=(3,2,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

设直线 MC 与平面 BDP 所成角为 α，则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MC}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MC}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.

所以直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由图知，在服药的 50 名患者中，指标 y 的值小于 60 的有 15 人，

所以从服药的 50 名患者中随机选出一人，此人指标 y 的值小于 60 的概率为 $\dfrac{15}{50}=0.3$.

（Ⅱ）由图知，A,B,C,D 四人中，指标 x 的值大于 1.7 的有 2 人：A 和 C.

所以 ξ 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(\xi=0)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}, P(\xi=1)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{3}, P(\xi=2)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$.

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

故ξ的期望$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$.

（Ⅲ）在这 100 名患者中，服药者指标 y 数据的方差大于未服药者指标 y 数据的方差.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由抛物线 C： $y^2=2px$ 过点 P（1，1），得 $p=\dfrac{1}{2}$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=x$.

抛物线 C 的焦点坐标为（$\dfrac{1}{4}$，0），准线方程为 $x=-\dfrac{1}{4}$.

（Ⅱ）由题意，设直线 l 的方程为 $y=kx+\dfrac{1}{2}$ （$k\neq 0$），l 与抛物线 C 的交点为 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases} y=kx+\dfrac{1}{2} \\ y^2=x \end{cases}$，得 $4k^2x^2+(4k-4)x+1=0$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{1-k}{k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{1}{4k^2}$.

因为点 P 的坐标为（1，1），所以直线 OP 的方程为 $y=x$， 点 A 的坐标为 (x_1,y_1).

直线 ON 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2}x$， 点 B 的坐标为 $(x_1,\dfrac{y_2y_1}{x_2})$.

因为

$$y_1+\frac{y_2y_1}{x_2}-2x_1=\frac{y_1y_2+y_2y_1-2x_1x_2}{x_2}$$

$$=\frac{(kx_1+\frac{1}{2})x_2+(kx_2+\frac{1}{2})x_1-2x_1x_2}{x_2}$$

$$=\frac{(2k-2)x_1x_2+\frac{1}{2}(x_2+x_1)}{x_2}$$

$$=\frac{(2k-2)\times\frac{1}{4k^2}+\frac{1-k}{2k^2}}{x_2}$$

$=0$，

所以 $y_1+\frac{y_2y_1}{x_2}=2x_1$.

故 A 为线段 BM 的中点.

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1, f'(0)=0$.

又因为 $f(0)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（Ⅱ）设 $h(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

所以对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 有 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(0)=1$，最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$.

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$c_1=b_1-a_1=1-1=0,$

$c_2=\max\{b_1-2a_1,b_2-2a_2\}=\max\{1-2\times1,3-2\times2\}=-1$，

$c_3=\max\{b_1-3a_1,b_2-3a_2,b_3-3a_3\}=\max\{1-3\times1,3-3\times2,5-3\times3\}=-2$.

当 $n\geq3$ 时，$(b_{k+1}-na_{k+1})-(b_k-na_k)=(b_{k+1}-b_k)-n(a_{k+1}-a_k)=2-n<0$，

所以 b_k-na_k 关于 $k\in\mathbf{N}^*$ 单调递减.

所以 $c_n=\max\{b_1-a_1n,b_2-a_2n,\cdots,b_n-a_nn\}=b_1-a_1n=1-n$.

所以对任意 $n\geq1, c_n=1-n$，于是 $c_{n+1}-c_n=-1$，

所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2，则

$b_k - na_k = b_1 + (k-1)d_2 - [a_1 + (k-1)d_1]n = b_1 - a_1 n + (d_2 - nd_1)(k-1)$.

所以 $c_n = \begin{cases} b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1), 当 d_2 > nd_1 时, \\ b_1 - a_1 n, 当 d_2 \le nd_1 时, \end{cases}$

①当 $d_1 > 0$ 时，取正整数 $m > \dfrac{d_2}{d_1}$，则当 $n \ge m$ 时，$nd_1 > d_2$，因此 $c_n = b_1 - a_1 n$.

此时，$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ 是等差数列.

②当 $d_1 = 0$ 时，对任意 $n \ge 1$，

$c_n = b_1 - a_1 n + (n-1)\max\{d_2, 0\} = b_1 - a_1 + (n-1)(\max\{d_2, 0\} - a_1)$.

此时，$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n, \cdots$ 是等差数列.

③当 $d_1 < 0$ 时，

当 $n > \dfrac{d_2}{d_1}$ 时，有 $nd_1 < d_2$.

所以 $\dfrac{c_n}{n} = \dfrac{b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1)}{n} = n(-d_1) + d_1 - a_1 + d_2 + \dfrac{b_1 - d_2}{n}$

$\ge n(-d_1) + d_1 - a_1 + d_2 - |b_1 - d_2|$.

对任意正数 M，取正整数 $m > \max\{\dfrac{M + |b_1 - d_2| + a_1 - d_1 - d_2}{-d_1}, \dfrac{d_2}{d_1}\}$，

故当 $n \ge m$ 时，$\dfrac{c_n}{n} > M$.