2016 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（文史类）参考答案

一、选择题：

（1）【答案】A

（2）【答案】A

（3）【答案】B

（4）【答案】A

（5）【答案】C

（6）【答案】C

（7）【答案】B

（8）【答案】D

二、填空题：

（9）【答案】1

（10）【答案】3

（11）【答案】4

（12）【答案】$(x-2)^2+y^2=9.$

（13）【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(14) 【答案】$[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$

三、解答题

（15）

【答案】（Ⅰ）$B=\dfrac{\pi}{6}$（Ⅱ）$\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）利用正弦定理，将边化为角：$2\sin A\sin B\cos B=\sqrt{3}\,\mathrm{sinB}\sin A$,再根据三角形内角范围化简得$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{6}$（Ⅱ）已知两角，求第三角，利用三角形内角和为$\pi$，将所求角化为两已知角的和，再根据两角和的正弦公式求解

试题解析：（Ⅰ）解：在ΔABC中，由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$a\sin B=b\sin A$，又由$a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$

得$2a\sin B\cos B=\sqrt{3}b\sin A=\sqrt{3}a\sin B$，所以$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$B=\dfrac{\pi}{6}$；

（Ⅱ）解：由$\cos A=\dfrac{1}{3}$得$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，所以

$\sin C=\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A=\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$

考点：同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦公式、两角和的正弦公式以及正弦定理

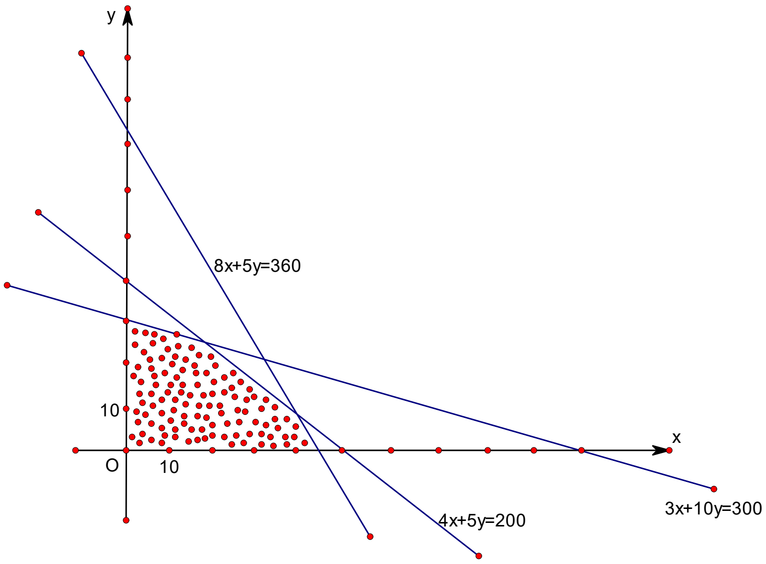
(16)

【答案】（Ⅰ）详见解析（Ⅱ）生产甲种肥料20车皮，乙种肥料24车皮时利润最大，且最大利润为112万元

【解析】

试题分析：（Ⅰ）根据生产原料不能超过A种原料200吨，B种原料360吨，C种原料300吨，列不等关系式，即可行域，再根据直线及区域画出可行域（Ⅱ）目标函数为利润$z=2x+3y$，根据直线平移及截距变化规律确定最大利润

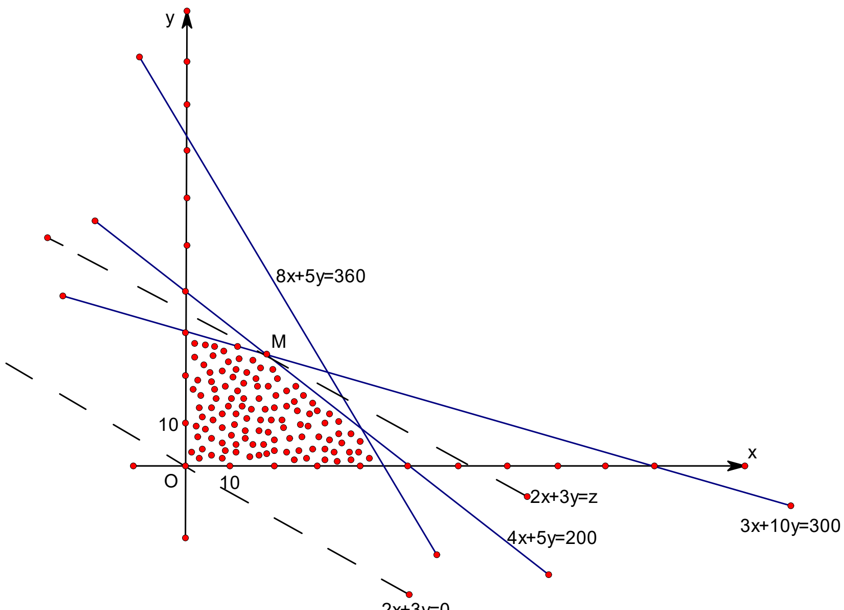
试题解析：（Ⅰ）解：由已知x,y满足的数学关系式为$\begin{cases}4x+5y\le 200\\8x+5y\le 360\\3x+10y\le 300\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$，该二元一次不等式组所表示的区域为图1中的阴影部分.



(1)

（Ⅱ）解：设利润为 z 万元，则目标函数 $z=2x+3y$，这是斜率为 $-\frac{2}{3}$，随 z 变化的一族平行直线. $\frac{z}{3}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\frac{z}{3}$ 取最大值时，z 的值最大. 又因为 x,y 满足约束条件，所以由图 2 可知，当直线 $z=2x+3y$ 经过可行域中的点 M 时，截距 $\frac{z}{3}$ 的值最大，即 z 的值最大. 解方程组 $\begin{cases}4x+5y=200\\3x+10y=300\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $M(20,24)$，所以 $z_{\max}=2\times20+3\times24=112$.

答：生产甲种肥料 20 车皮，乙种肥料 24 车皮时利润最大，且最大利润为 112 万元.



(2)

考点：线性规划

【结束】

(17)

【答案】（Ⅰ）详见解析（Ⅱ）详见解析（Ⅲ）$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）证明线面平行，一般利用线面平行判定定理，即从线线平行出发给予证明，而线线平行寻找与论证，往往结合平几知识，如本题构造一个平行四边形：取BD的中点为O，可证四边形$OGFE$是平行四边形，从而得出$FG//OE$（Ⅱ）面面垂直的证明，一般转化为证线面垂直，而线面垂直的证明，往往需多次利用线面垂直判定与性质定理，而线线垂直的证明有时需要利用平几条件，如本题可由余弦定理解出$\angle ADB=90^0$，即$BD\perp AD$（Ⅲ）求线面角，关键作出射影，即面的垂线，可利用面面垂直的性质定理得到线面垂直，即面的垂线：过点A作$AH\perp DE$于点H，则$AH\perp$平面BED，从而直线AB与平面BED所成角即为$\angle ABH$.再结合三角形可求得正弦值

试题解析：

（Ⅰ）证明：取BD的中点为O，连接OE,OG，在ΔBCD中，因为G是BC的中点，所以$OG//DC$且$OG=\dfrac{1}{2}DC=1$，又因为$EF//AB,AB//DC$，所以$EF//OG$且$EF=OG$，即四边形$OGFE$是平行四边形，所以$FG//OE$，又$FG\not\subset$平面BED，$OE\subset$平面BED，所以$FG//$平面BED.

（Ⅱ）证明：在ΔABD中，$AD=1,AB=2,\angle BAD=60^0$，由余弦定理可$BD=\sqrt{3}$，进而可得$\angle ADB=90^0$，即$BD\perp AD$，又因为平面$AED\perp$平面$ABCD,BD\subset$平面$ABCD$；平面$AED\bigcap$平面$ABCD=AD$，所以$BD\perp$平面$AED$.又因为$BD\subset$平面$BED$，所以平面$BED\perp$平面$AED$.

（Ⅲ）解：因为$EF//AB$，所以直线EF与平面BED所成角即为直线AB与平面BED所成角.过点A作$AH\perp DE$于点H，连接BH，又因为平面$BED\bigcap$平面$AED=ED$，由（Ⅱ）知$AH\perp$平面BED，所以直线AB与平面BED所成角即为$\angle ABH$.在ΔADE中，$AD=1,DE=3,AE=\sqrt{6}$，由余弦定理可得$\cos\angle ADE=\dfrac{2}{3}$，所以$\sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，因此$AH=AD\cdot\sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，在$Rt\Delta AHB$中，$\sin\angle ABH=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$，所以直线$AB$与平面$BED$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

考点：直线与平面平行和垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成角

【结束】

(18)

【答案】（Ⅰ）$a_n=2^{n-1}$（Ⅱ）$2n^2$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）求等比数列通项，一般利用待定系数法：先由$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1q}=\frac{2}{a_1q^2}$解得$q=2,q=-1$，分别代入$S_n=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63$得$q\neq -1$，$a_1=1$（Ⅱ）先根据等差中项得

$b_n=\frac{1}{2}(\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1})=\frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1}+\log_2 2^n)=n-\frac{1}{2}$，再利用分组求和法求和：

$$T_{2n}=(-b_1^2+b_2^2)+(-b_3^2+b_4^2)+\cdots+(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2)=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=\frac{2n(b_1+b_{2n})}{2}=2n^2$$

试题解析：（Ⅰ）解：设数列$\{a_n\}$的公比为q，由已知有$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1q}=\frac{2}{a_1q^2}$，解之可得$q=2,q=-1$，又由$S_n=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63$知$q\neq -1$，所以$\frac{a_1(1-2^6)}{1-2}=63$，解之得$a_1=1$，所以$a_n=2^{n-1}$.

（Ⅱ）解：由题意得$b_n=\frac{1}{2}(\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1})=\frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1}+\log_2 2^n)=n-\frac{1}{2}$，即数列$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$1$的等差数列.

设数列$\{(-1)^n b_n^2\}$的前n项和为T_n，则

$$T_{2n}=(-b_1^2+b_2^2)+(-b_3^2+b_4^2)+\cdots+(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2)=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=\frac{2n(b_1+b_{2n})}{2}=2n^2$$

考点：等差数列、等比数列及其前n项和

【结束】

（19）

【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（Ⅱ）$\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）求椭圆标准方程，只需确定量，由$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3c}{|FA|}$，得$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3c}{a(a-c)}$，再利用

$a^2-c^2=b^2=3$，可解得$c^2=1$，$a^2=4$（Ⅱ）先化简条件：$\angle MOA=\angle MAO \Leftrightarrow |MA|=|MO|$，即 M 再 OA 中垂线上，$x_M=1$，再利用直线与椭圆位置关系，联立方程组求$B$；利用两直线方程组求 H，最后根据$BF\perp HF$，列等量关系解出直线斜率.

试题解析：（1）解：设$F(c,0)$，由$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3c}{|FA|}$，即$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3c}{a(a-c)}$，可得$a^2-c^2=3c^2$，又$a^2-c^2=b^2=3$，所以$c^2=1$，因此$a^2=4$，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线的斜率为$k(k\neq 0)$，则直线l的方程为$y=k(x-2)$，

设$B(x_B,y_B)$，由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$消去$y$，

整理得$(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$，解得$x=2$或$x=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，

由题意得$x_B=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，从而$y_B=\frac{-12k}{4k^2+3}$，

由（1）知$F(1,0)$，设$H(0,y_H)$，有$\overrightarrow{FH}=(-1,y_H)$，$\overrightarrow{BF}=(\frac{9-4k^2}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3})$，

由$BF\perp HF$，得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=0$，所以$\frac{4k^2-9}{4k^2+3}+\frac{12ky_H}{4k^2+3}=0$，

解得$y_H=\frac{9-4k^2}{12k}$，因此直线MH的方程为$y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}$，

设$M(x_M,y_M)$，由方程组$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k},\\ y=k(x-2),\end{cases}$消去$y$，得$x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}$，

在ΔMAO中，$\angle MOA=\angle MAO \Leftrightarrow |MA|=|MO|$，

即$(x_M-2)^2+y_M^2=x_M^2+y_M^2$，化简得$x_M=1$，即$\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}=1$，

解得$k=-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$k=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以直线l的斜率为$k=-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$k=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

考点：椭圆的标准方程和几何性质，直线方程

【结束】

（20）

【答案】（Ⅰ）详见解析.（Ⅱ）详见解析（Ⅲ）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先求函数的导数：$f'(x)=3x^2-a$，再根据导函数零点是否存在情况，分类讨论：①当$a\le 0$时，有$f'(x)=3x^2-a\ge 0$恒成立，所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\infty)$.②当$a>0$时，存在三个单调区间（Ⅱ）由题意得$f'(x_0)=3x_0^2-a=0$即$x_0^2=\frac{a}{3}$，再由$f(x_1)=f(x_0)$化简可得结论（Ⅲ）实质研究函数$g(x)$最大值：主要比较$f(1),f(-1)$，$|f(\frac{\sqrt{3a}}{3}|,|f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|$的大小即可，分三种情况研究①当$a\ge 3$时，$-\frac{\sqrt{3a}}{3}\le -1<1\le\frac{\sqrt{3a}}{3}$，②当$\frac{3}{4}\le a<3$时，$-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\le -1<-\frac{\sqrt{3a}}{3}<\frac{\sqrt{3a}}{3}<1\le\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，③当$0<a<\frac{3}{4}$时，$-1<-\frac{2\sqrt{3a}}{3}<\frac{2\sqrt{3a}}{3}<1$.

试题解析：（1）解：由$f(x)=x^3-ax-b$，可得$f'(x)=3x^2-a$，下面分两种情况讨论：

①当$a\le 0$时，有$f'(x)=3x^2-a\ge 0$恒成立，所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\infty)$.

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$或$x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

当x变化时，$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3a}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3})$	$\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3})$，单调递增区间为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$(-\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty)$．

（2）证明：因为 $f(x)$ 存在极值点，所以由（1）知 $a>0$ 且 $x_0\neq 0$．

由题意得 $f'(x_0)=3x_0^2-a=0$，即 $x_0^2=\frac{a}{3}$，

进而 $f(x_0)=x_0^3-ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b$，

又 $f(-2x_0)=-8x_0^3+2ax_0-b=-\frac{8a}{3}x_0+2ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b=f(x_0)$，且 $-2x_0\neq x_0$，

由题意及（1）知，存在唯一实数 x_1 满足 $f(x_1)=f(x_0)$，且 $x_1\neq x_0$，因此 $x_1=-2x_0$，

所以 $x_1+2x_0=0$．

（3）证明：设 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，$\max\{x,y\}$ 表示 x，y 两数的最大值，下面分三种情况讨论：

①当 $a\geq 3$ 时，$-\frac{\sqrt{3a}}{3}\leq -1<1\leq\frac{\sqrt{3a}}{3}$，由（1）知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的取值范围为 $[f(1),f(-1)]$，因此，

$M=\max\{[f(1),f(-1)]\}=\max\{|1-a-b|,|-1+a-b|\}=\max\{|a-1+b|,|a-1-b|\}$

$=\begin{cases}a-1-b,b\geq 0,\\a-1-b,b<0,\end{cases}$ 所以 $M=a-1+|b|\geq 2$．

②当 $\frac{3}{4}\leq a<3$ 时，$-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\leq -1<-\frac{\sqrt{3a}}{3}<\frac{\sqrt{3a}}{3}<1\leq\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，

由（1）和（2）知 $f(-1)\geq f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(1)\leq f(\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的取值范围为 $[f(\frac{\sqrt{3a}}{3}),f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})]$，

所以 $\max\{|f(\frac{\sqrt{3a}}{3}|,|f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|\}=\max\{|-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|\}$

$=\max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|\}=\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|b|\geq\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}$．

③当$0<a<\frac{3}{4}$时，$-1<-\frac{2\sqrt{3a}}{3}<\frac{2\sqrt{3a}}{3}<1$，由（1）和（2）知，

$f(-1)<f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(1)>f(\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以$f(x)$在区间$[-1,1]$上的取值范围为$[f(1),f(-1)]$，因此，

$M=\max\{[f(1),f(-1)]\}=\max\{|-1+a-b|,|1-a-b|\}=\max\{|1-a+b|,|1-a-b|\}$

$=1-a+|b|>\frac{1}{4}$.

综上所述，当$a>0$时，$g(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值不小于$\frac{1}{4}$.

考点：导数的运算，利用导数研究函数的性质、证明不等式