2016 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（理工类）

一、选择题：

（1）【答案】D

（2）【答案】B

（3）【答案】A

（4）【答案】B

（5）【答案】C

（6）【答案】D

（7）【答案】B

（8）【答案】C

第Ⅱ卷

二、填空题：

（9）【答案】2

（10）【答案】-56

（11）【答案】2

（12）【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

（13）【答案】$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$

(14) 【答案】$\sqrt{6}$

三、解答题

（15）

【答案】（Ⅰ）$\left\{x\middle|x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$，$\pi$.（Ⅱ）在区间$\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调递增，在区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递减.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先利用诱导公式、两角差余弦公式、二倍角公式、配角公式将函数化为基本三角函数：

$f(x)=2\sin\left(2x\right)-\frac{\pi}{3}$，再根据正弦函数性质求定义域、周期$\left(\text{II}\right)$根据（1）的结论，研究三角函数在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上单调性

试题解析：$\left(\text{I}\right)$ 解：$f\left(x\right)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$.

$f\left(x\right)=4\tan x\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=4\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=4\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-\sqrt{3}=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\left(1\text{-}\cos 2x\right)-\sqrt{3}=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x\right)-\frac{\pi}{3}$.

所以，$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

$\left(\text{II}\right)$解：令$z=2x-\frac{\pi}{3}$, 函数$y=2\sin z$的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in Z.$

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$,得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z.$

设$A=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],B=\left\{x\middle|-\frac{\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z\right\}$，易知$A\bigcap B=\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$.

所以, 当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时, $f\left(x\right)$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，在区间$\left[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right]$上单调递减.

考点：三角函数性质，诱导公式、两角差余弦公式、二倍角公式、配角公式

【结束】

(16)

【答案】（Ⅰ）$\frac{1}{3}$（Ⅱ）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先确定从这 10 人中随机选出 2 人的基本事件种数：C_{10}^2，再确定选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4 所包含基本事件数：$C_3^1C_4^1+C_4^2$，最后根据概率公式求概率（Ⅱ）先确定随机变量可能取值为$0,1,2.$再分别求出对应概率，列出概率分布，最后根据公式计算数学期望

试题解析：解：(I) 由已知，有

$$P\left(A\right)=\frac{C_3^1C_4^1+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3},$$

所以，事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{3}$.

(Ⅱ) 随机变量 X 的所有可能取值为 $0,1,2$.

$$P\left(X=0\right)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{15},$$

$$P\left(X=1\right)=\frac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15},$$

$$P\left(X=2\right)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}.$$

所以，随机变量 X 分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

随机变量 X 的数学期望 $E\left(X\right)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{4}{15}=1$.

考点：概率，概率分布与数学期望

【结束】

(17)

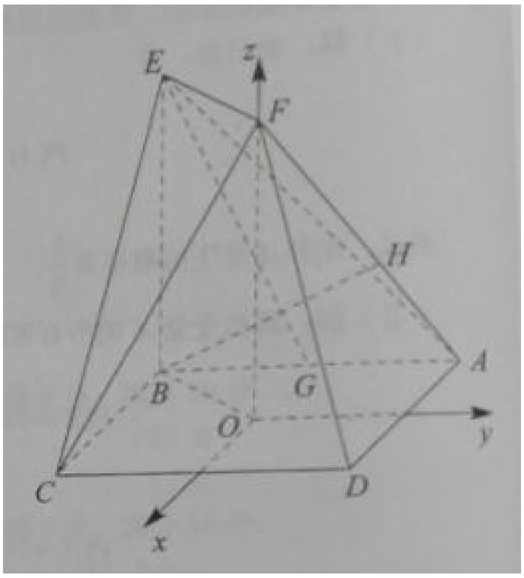
【答案】（Ⅰ）详见解析（Ⅱ）$\frac{\sqrt{3}}{3}$（Ⅲ）$\frac{\sqrt{7}}{21}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）利用空间向量证明线面平行，关键是求出面的法向量，利用法向量与直线方向向量垂直进行论证（Ⅱ）利用空间向量求二面角，关键是求出面的法向量，再利用向量数量积求出法向量夹角，最后根据向量夹角与二面角相等或互补关系求正弦值（Ⅲ）利用空间向量证明线面平行，关键是求出面的法向量，再利用向量数量积求出法向量夹角，最后根据向量夹角与线面角互余关系求正弦值

试题解析：依题意，$OF\perp$ 平面 $ABCD$，如图，以 O 为点，分别以 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{OF}$ 的方向为 x 轴，y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，依题意可得 $O(0,0,0)$，

$A\left(-1,1,0\right),B(-1,-1,0),C(1,-1,0),D(1,1,0),E(-1,-1,2),F(0,0,2),G(-1,0,0)$.



（I）证明：依题意，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0),\overrightarrow{AF}=\left(1,-1,2\right)$.设$\overrightarrow{n_1}=\left(x,y,z\right)$为平面$ADF$的法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}2x=0\\x-y+2z=0\end{cases}$.不妨设$z=1$，可得$\overrightarrow{n_1}=\left(0,2,1\right)$，又$\overrightarrow{EG}=\left(0,1,-2\right)$，可得$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$，又因为直线

$EG\not\subset$平面ADF，所以$EG//$平面ADF.

（II）解：易证，$\overrightarrow{OA}=\left(-1,1,0\right)$为平面$OEF$的一个法向量.依题意，$\overrightarrow{EF}=\left(1,1,0\right),\overrightarrow{CF}=\left(-1,1,2\right)$.设

$\overrightarrow{n_2}=\left(x,y,z\right)$为平面$CEF$的法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y=0\\-x+y+2z=0\end{cases}$.不妨设$x=1$，可得

$\overrightarrow{n_2}=\left(1,-1,1\right)$.

因此有$\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，于是$\sin<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以，二面角$O-EF-C$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（III）解：由$AH=\dfrac{2}{3}HF$，得$AH=\dfrac{2}{5}AF$.因为$\overrightarrow{AF}=\left(1,-1,2\right)$，所以$\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，进而有$H\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，从而$\overrightarrow{BH}=\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，因此$\cos<\overrightarrow{BH},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{BH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{21}$.所以，直线$BH$和平面$CEF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{21}$.

考点：利用空间向量解决立体几何问题

【结束】

(18)

【答案】（Ⅰ）详见解析（Ⅱ）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先根据等比中项定义得：$b_n^2=a_na_{n+1}$，从而$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=2da_{n+1}$，因此根据等差数列定义可证：$c_{n+1}-c_n=2d\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)=2d^2$（Ⅱ） 对数列不等式证明一般以算代证先利用分组求和化简$T_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}\left(-1\right)^n b_n{}^2=\left(-b_1^2+b_2^2\right)+\left(-b_3^2+b_4^2\right)+\left(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2\right)=2d^2n\left(n+1\right)$，再利用裂项相消法求和$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\frac{1}{2d^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{1}{2d^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2d^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，易得结论.

试题解析：（I）证明：由题意得$b_n^2=a_na_{n+1}$，有$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=2da_{n+1}$，因此$c_{n+1}-c_n=2d\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)=2d^2$，所以$\left\{c_n\right\}$是等差数列.

（II）证明：$T_n=\left(-b_1^2+b_2^2\right)+\left(-b_3^2+b_4^2\right)+\left(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2\right)$

$$=2d\left(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\right)=2d\cdot\frac{n\left(a_2+a_{2n}\right)}{2}=2d^2n\left(n+1\right)$$

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\frac{1}{2d^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{1}{2d^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2d^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2d^2}$.

考点：等差数列、等比中项、分组求和、裂项相消求和

【结束】

（19）

【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（Ⅱ）$(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{4}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{4},+\infty)$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）求椭圆标准方程，只需确定量，由$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3c}{|FA|}$，得$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3c}{a(a-c)}$，再利用$a^2-c^2=b^2=3$，可解得$c^2=1$，$a^2=4$（Ⅱ）先化简条件：$\angle MOA=\angle MAO\Leftrightarrow|MA|=|MO|$，即M

再 OA 中垂线上，$x_M=1$，再利用直线与椭圆位置关系，联立方程组求 B；利用两直线方程组求 H，最后根据 $BF\perp HF$，列等量关系解出直线斜率.取值范围

试题解析：（1）解：设 $F(c,0)$，由 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3c}{|FA|}$，即 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3c}{a(a-c)}$，可得 $a^2-c^2=3c^2$，又 $a^2-c^2=b^2=3$，所以 $c^2=1$，因此 $a^2=4$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）（Ⅱ）解：设直线 l 的斜率为 k（$k\neq 0$），则直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$.设 $B(x_B,y_B)$，由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，消去 y，整理得 $(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

解得 $x=2$，或 $x=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，由题意得 $x_B=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，从而 $y_B=\frac{-12k}{4k^2+3}$.

由（I）知，$F(1,0)$，设 $H(0,y_H)$，有 $\overrightarrow{FH}=(-1,y_H)$，$\overrightarrow{BF}=(\frac{9-4k^2}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3})$.由 $BF\perp HF$，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=0$，所以 $\frac{9-4k^2}{4k^2+3}+\frac{12ky_H}{4k^2+3}=0$，解得 $y_H=\frac{9-4k^2}{12k}$.因此直线 MH 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}$.

设 $M(x_M,y_M)$，由方程组 $\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}\\ y=k(x-2)\end{cases}$ 消去 y，解得 $x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}$.在 ΔMAO 中，$\angle MOA\le\angle MAO\Leftrightarrow|MA|\le|MO|$，即 $(x_M-2)^2+y_M^2\le x_M^2+y_M^2$，化简得 $x_M\ge 1$，即 $\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}\ge 1$，解得 $k\le-\frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k\ge\frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以，直线 l 的斜率的取值范围为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{4}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{4},+\infty)$.

考点：椭圆的标准方程和几何性质，直线方程

【结束】

（20）

【答案】（Ⅰ）详见解析（Ⅱ）详见解析（III）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先求函数的导数：$f'(x)=3(x-1)^2-a$，再根据导函数零点是否存在情况，分类讨论：①当$a\le 0$时，有$f'(x)\ge 0$恒成立，所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\infty)$.②当$a>0$时，存在三个单调区间

（Ⅱ）由题意得$(x_0-1)^2=\frac{a}{3}$，计算可得$f(3-2x_0)=f(x_0)$再由$f(x_1)=f(x_0)$及单调性可得结论（III）实质研究函数$g(x)$最大值：主要比较$f(1),f(-1)$，$|f(\frac{\sqrt{3a}}{3}|,|f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|$的大小即可，分三种情况研究①当 $a\ge 3$ 时，$1-\frac{\sqrt{3a}}{3}\le 0<2\le 1+\frac{\sqrt{3a}}{3}$，②当$\frac{3}{4}\le a<3$时，$1-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\le 0<1-\frac{\sqrt{3a}}{3}<1+\frac{\sqrt{3a}}{3}<2\le 1+\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，③当$0<a<\frac{3}{4}$时，$0<1-\frac{\sqrt{3a}}{3}<1+\frac{\sqrt{3a}}{3}<2$.

试题解析：（Ⅰ）解：由$f(x)=(x-1)^3-ax-b$，可得$f'(x)=3(x-1)^2-a$.

下面分两种情况讨论：

（1）当$a\le 0$时，有$f'(x)=3(x-1)^2-a\ge 0$恒成立，所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$.

（2）当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=1+\frac{\sqrt{3a}}{3}$，或$x=1-\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1-\frac{\sqrt{3a}}{3})$	$1-\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(1-\frac{\sqrt{3a}}{3},1+\frac{\sqrt{3a}}{3})$	$1+\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(1+\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty)$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以$f(x)$的单调递减区间为$(1-\frac{\sqrt{3a}}{3},1+\frac{\sqrt{3a}}{3})$，单调递增区间为$(-\infty,1-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$(1+\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty)$.

（II）证明：因为$f(x)$存在极值点，所以由（I）知$a>0$，且$x_0\ne 1$，由题意，得$f'(x_0)=3(x_0-1)^2-a=0$，

即$(x_0-1)^2=\frac{a}{3}$，

进而$f(x_0)=(x_0-1)^3-ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-\frac{a}{3}-b$.

又$f(3-2x_0)=(2-2x_0)^3-a(3-2x_0)-b=\frac{8a}{3}(1-x_0)+2ax_0-3a-b$

$=-\frac{2a}{3}x_0-\frac{a}{3}-b=f(x_0)$，且$3-2x_0\neq x_0$，由题意及(I)知，存在唯一实数满足 $f(x_1)=f(x_0)$，且$x_1\neq x_0$，

因此$x_1=3-2x_0$，所以$x_1+2x_0=3$；

（III）证明：设$g(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为M，$\max\{x,y\}$表示x,y两数的最大值.下面分三种情况同理：

（1）当$a\geq 3$时，$1-\frac{\sqrt{3a}}{3}\leq 0<2\leq 1+\frac{\sqrt{3a}}{3}$，由（I）知，$f(x)$在区间$[0,2]$上单调递减，所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的取值范围为$[f(2),f(0)]$，因此

$M=\max\{|f(2)|,|f(0)|\}=\max\{|1-2a-b|,|-1-b|\}$

$=\max\{|a-1+(a+b)|,|a-1-(a+b)|\}$

$=\begin{cases}a-1+(a+b),a+b\geq 0\\ a-1-(a+b),a+b<0\end{cases}$，所以$M=a-1+|a+b|\geq 2$.

（2）当$\frac{3}{4}\leq a<3$时，$1-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\leq 0<1-\frac{\sqrt{3a}}{3}<1+\frac{\sqrt{3a}}{3}<2\leq 1+\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，由（I）和（II）知，

$f(0)\geq f(1-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(1+\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(2)\leq f(1+\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(1-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的取值范围为$[f(1+\frac{\sqrt{3a}}{3}),f(1-\frac{\sqrt{3a}}{3})]$，因此

$M=\max\{|f(1+\frac{\sqrt{3a}}{3})|,|f(1-\frac{\sqrt{3a}}{3})|\}=\max\{|-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-a-b|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-a-b|\}$

$=\max\{|-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-(a+b)|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-(a+b)|\}$

$=\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|a+b|\geq\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}$.

（3）当$0<a<\frac{3}{4}$时，$0<1-\frac{\sqrt{3a}}{3}<1+\frac{\sqrt{3a}}{3}<2$，由（I）和（II）知，

$f(0)<f(1-\frac{2\sqrt{3}a}{3})=f(1+\frac{\sqrt{3}a}{3})$，$f(2)>f(1+\frac{2\sqrt{3}a}{3})=f(1-\frac{\sqrt{3}a}{3})$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的取值范围为 $[f(0),f(2)]$，因此

$M=\max\{|f(0)|,|f(2)|\}=\max\{|-1-b|,|1-2a-b|\}$

$=\max\{|1-a+(a+b)|,|1-a-(a+b)|\}$

$=1-a+|a+b|>\frac{1}{4}$.

综上所述，当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

考点：导数的运算，利用导数研究函数的性质、证明不等式

【结束】