答案

一．选择题

1. C　　2.A　　3.D　　4.B　　5.B　　6.A　　7.C　　8.D　　9.C　　10.B

二．填空题

11. -2

12.x+2y-5=0

13.4

14. $3\sqrt{2}$

15. $\frac{2}{3}$

三.解答题

16. 解：　（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由已知条件得

$$a_1+2d=2, 3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=\frac{9}{2},$$

化简得 $a_1+2d=2, a_1+d=\frac{3}{2},$

解得 $a_1=1$，$d=\frac{1}{2},$

故通项公式 $a_n=1+\frac{n-1}{2}$，即 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

(2)由（1）得 $b_1=1$，$b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$.

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q,则 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$,从而 $q=2$.

故 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1.$$

17. 解：（Ⅰ）列表计算如下

i	t_i	y_i	t_i^2	t_iy_i
1	1	5	1	5
2	2	6	4	12
3	3	7	9	21
4	4	8	16	32
5	5	10	25	50
Σ	15	36	55	120

这里 $n=5,\bar{t}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i=\frac{15}{5}=3,\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{36}{5}=7.2.$

又 $l_{nt}=\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2=55-5\times3^2=10,l_{ny}=\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}=120-5\times3\times7.2=12.$

从而 $\hat{b}=\frac{l_{ny}}{l_{nt}}=\frac{12}{10}=1.2,\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=7.2-1.2\times3=3.6$.

故所求回归方程为 $\hat{y}=1.2t+3.6$.

（Ⅱ）将 $t=6$ 代入回归方程可预测该地区 2015 年的人民币储蓄存款为 $\hat{y}=1.2\times6+3.6=10.8$(千亿元).

18. 解：（Ⅰ） $f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\sqrt{3}\cos^2x=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos2x)$

$$=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

因此 $f(x)$ 的最小正周期为 π，最小值为 $-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）由条件可知：$g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，有 $x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，从而 $\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的值域为 $[\frac{1}{2},1]$，那么 $\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的值域为 $[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

故 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的值域是 $[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

19. 解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=3ax^2+2x$

因为 $f(x)$ 在 $x=-\frac{4}{3}$ 处取得极值，所以 $f'(-\frac{4}{3})=0$，

即 $3a\times\frac{16}{9}+2\times(-\frac{4}{3})=\frac{16a}{3}-\frac{8}{3}=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$g(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$,

故 $g'(x)=\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right)e^x=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0, x=-1或x=-4$.

当 $x<-4$ 时，$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 为减函数；

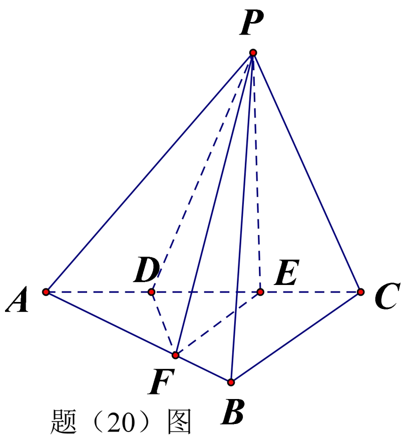
当 $-4<x<-1$ 时，$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 为增函数；

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 为减函数；

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 为增函数；

综上知 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4)和(-1,0)$ 内为减函数，$(-4,-1)和(0,+\infty)$ 内为增函数.

20. （Ⅰ）证明：如题(20)图.由 DE=EC，PD=PC 知，E 为等腰 $\triangle$PDC 中 DC 边的中点，故 PE $\perp$ AC，



题（20）图

又平面 PAC $\perp$ 平面 ABC，平面 PAC $\cap$ 平面 ABC=AC，PE $\subset$ 平面 PAC，PE $\perp$ AC，所以 PE $\perp$ 平面 ABC，从而 PE $\perp$ AB.

因 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}, EF\parallel BC, 故AB\perp EF$.

从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，

所以 AB $\perp$ 平面 PFE.

（Ⅱ）解：设 BC=x ,则在直角 $\triangle$ABC 中，

$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{36-x^2}$.从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$

由 $EF\parallel BC$，知 $\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$，得 $\triangle AEF\sim\triangle ABC$,故 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，

即 $S_{\triangle AEF}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$.

由 $AD=\frac{1}{2}AE$,$S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AFE}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}$,

从而四边形 DFBC 的面积为 $S_{DFBC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}-\frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}=\frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}$

由（Ⅰ）知，PE $\perp$ 平面 ABC，所以 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高.

在直角ΔPEC中，$PE=\sqrt{PC^2-EC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

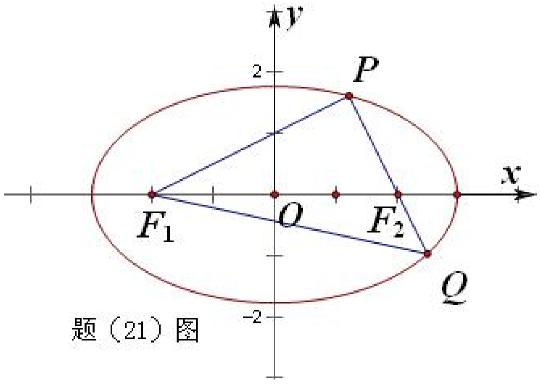
体积$V_{P-DFBC}=\frac{1}{3}\times S_{DFBC}\times PE=\frac{1}{3}\times\frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}\times 2\sqrt{3}=7$，

故得$x^4-36x^2+243=0$，解得$x^2=9或x^2=7$，由于$x>0$，可得$x=3或x=3\sqrt{3}$．

所以$BC=3或BC=3\sqrt{3}$．

21．解：（Ⅰ）由椭圆的定义，$2a=|PF_1|+|PF_2|=\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$，故$a=2$.

设椭圆的半焦距为c，由已知$PF_1\perp PF_2$，因此



题（21）图

$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，即$c=\sqrt{3}$.

从而$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$

故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（Ⅱ）如题(21)图，由$PF_1\perp PQ,|PQ|=\lambda|PF_1|$,得

$|QF_1|=\sqrt{|PF_1|^2+|PQ|^2}=\sqrt{1+\lambda^2}\,|PF_1|$

由椭圆的定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a,|QF_1|+|QF_2|=2a$,进而$|PF_1|+|PQ|+|QF_1|=4a$

于是$(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|PF_1|=4a$．

解得$|PF_1|=\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$，故$|PF_2|=2a-|PF_1|=\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$．

由勾股定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|PF_2|^2=(2c)^2=4c^2$，

从而$\left(\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2+\left(\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2=4c^2$，

两边除以$4a^2$，得$\frac{1}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}+\frac{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)^2}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}=e^2$，

若记$t=1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，则上式变成$e^2=\frac{4+(t-2)^2}{t^2}=8\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$．

由$\frac{3}{4}\le\lambda<\frac{4}{3}$，并注意到$1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$关于$\lambda$的单调性，得$3\le t<4$，即$\frac{1}{4}<\frac{1}{t}\le\frac{1}{3}$，进而$\frac{1}{2}<e^2\le\frac{5}{9}$，

即 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e$ £ $\frac{\sqrt{5}}{3}$.