数学（理科）试题参考答案

一、　选择题：本题考察基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1.C　2.C　3.B　4.D　5.A　6.A　7.D　8.B

二、　填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，满分 36 分）

9. $2\sqrt{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.　10. 0，$2\sqrt{2}-3$.　11. π，$[\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{7\pi}{8}+k\pi]$，$(k\in Z.)$

12. $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$　13. $\dfrac{7}{8}$.　14.3　15. 1，2，$2\sqrt{2}$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

16. （1）由 $b^2-a^2=\dfrac{1}{2}c^2$ 及正弦定理得

$\sin^2 B-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sin^2 C$，

$\therefore -\cos 2B=\sin^2 C$，

又由 $A=\dfrac{\pi}{4}$，即 $B+C=\dfrac{3\pi}{4}$，得

$-\cos 2B=\sin 2C=2\sin C\cos C$，

解得

$\tan C=2$；

（2）由 $\tan C=2$，$C\in(0,\pi)$ 得

$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

又$\because \sin B=\sin(A+C)=\sin(\dfrac{\pi}{4}+C)$，

$\therefore \sin B=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

由正弦定理得

$c=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}b$，

又$\because A=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{1}{2}bc\sin A=3$，

$\therefore bc=6\sqrt{2}$，

故 $b=3$.

17.

（1）设 E 为 BC 的中点，由题意得 $A_1E\perp$ 平面 ABC，$\therefore A_1E\perp AE$，

$\because AB=AC$，$\therefore AE\perp BC$，

故 $AE\perp$ 平面 A_1BC，

由 D，E 分别 B_1C_1，BC 的中点，得

$DE//B_1B$ 且 $DE=B_1B$，从而 $DE//A_1A$ 且 DE= A_1A，

∴四边形 A_1AED 为平行四边形，

故 $A_1D//AE$，

又∵ $AE\perp$ 平面 A_1BC_1，∴ $A_1D\perp$ 平面 A_1BC_1；

（2）作 $A_1F\perp BD$，且 $A_1F\cap BD=F$，连结 B_1F，

由 $AE=EB=\sqrt{2}$，$\angle A_1EA=\angle A_1EB=90^\circ$，得 $A_1B=A_1A=4$，

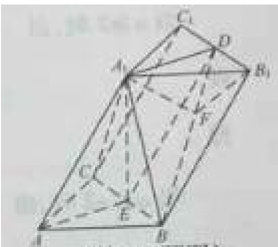
由 $A_1D=B_1D$，$A_1B=B_1B$，得 $\Delta A_1DB\cong\Delta B_1DB$，

由 $A_1F\perp BD$，得 $B_1F\perp BD$，因此 $\angle A_1FB_1$ 为二面角 A_1-BD-B_1 的平面角，

由 $A_1D=\sqrt{2}$，$A_1B=4$，$\angle DA_1B=90^\circ$，得

$BD=3\sqrt{2}$，$A_1F=B_1F=\dfrac{4}{3}$，

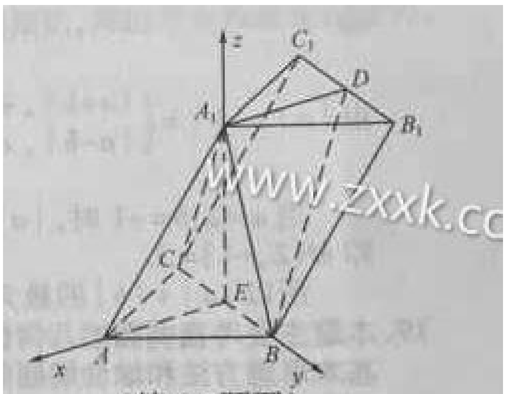
由余弦定理得，$\cos\angle A_1FB_1=-\dfrac{1}{8}$.



（第 17 题图）

方法二

以 CB 的中点 E 为原点，分别以射线 EA，EB 为 x，y 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 E-xyz，如图所示。



（第 17 题图）

A_1（0,0，$\sqrt{14}$）B（0，$\sqrt{2}$，0）D（-$\sqrt{2}$，0，$\sqrt{14}$），B_1（-$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$、$\sqrt{14}$）

$\overrightarrow{A_1B}$ =（0，$\sqrt{2}$，-$\sqrt{14}$）$\overrightarrow{BD}$ =（-$\sqrt{2}$，-$\sqrt{2}$，$\sqrt{14}$）　$\overrightarrow{DB_1}$ =（0，$\sqrt{2}$，0）

设平面 A_1BD 的法向量为 m=（x_1，y_1，z_1），平面 B_1BD 的法向量为 n=（x_2，y_2，z_2）

由$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{A_1B}=0 \\ m\cdot\overrightarrow{BD}=0 \end{cases}$　即$\begin{cases} \sqrt{2}\ y_1-\sqrt{14}\ z_1=0 \\ -\sqrt{2}\ x_1-\sqrt{2}\ y_1+\sqrt{14}\ z_1=0 \end{cases}$

可取

m=（0，$\sqrt{7}$，1）

由$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{DB_1}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{BD}=0 \end{cases}$　即$\begin{cases} \sqrt{2}\ y_2=0 \\ -\sqrt{2}\ x_2-\sqrt{2}\ y_2+\sqrt{14}=0 \end{cases}$

可取

n=（$\sqrt{7}$，0,1）

于是$\left|\cos<m,n>\right|=\dfrac{|m\bullet n|}{|m|\bullet|n|}=\dfrac{1}{8}$

由题意可知，所求二面角的平面角是钝角，故二面角 A_1-BD-B_1 的平面角的余弦值为-$\dfrac{1}{8}$

18.

（1）由 $f(x)=(x+\dfrac{a}{2})^2+b-\dfrac{a^2}{4}$，得对称轴为直线 $x=-\dfrac{a}{2}$，

由 $|a|\geq 2$，得

$|-\dfrac{a}{2}|\geq 1$，

故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调，

$\therefore M(a,b)=\max\{|f(1)|,|f(-1)|\}$，

当 $a\geq 2$ 时，由

$f(1)-f(-1)=2a\geq 4$，

得 $\max\{f(1),f(-1)\}\geq 2$，即 $M(a,b)\geq 2$，

当 $a\leq -2$ 时，由

$f(-1)-f(1)=-2a\geq 4$，

得 $\max\{f(-1),-f(1)\}\geq 2$，即 $M(a,b)\geq 2$，

综上，当 $|a|\geq 2$ 时，

$M(a,b)\geq 2$；

（2）由 $M(a,b)\leq 2$ 得

$|1+a+b|=|f(1)|\le 2$，$|1-a+b|=|f(-1)|\le 2$，

故$|a+b|\le 3$，$|a-b|\le 3$，

由$|a|+|b|=\begin{cases}|a+b|,ab\ge 0\\ |a-b|,ab<0\end{cases}$，得

$|a|+|b|\le 3$，

当$a=2$，$b=-1$时，$|a|+|b|=3$，且$|x^2+2x-1|$在$[-1,1]$上的最大值为2

，即$M(2,-1)=2$，

$\therefore |a|+|b|$的最大值为3..

.19.

（1） 由题意知$m\ne 0$，可设直线 AB 的方程为$y=-\dfrac{1}{m}x+b$，

（2） 由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=-\dfrac{1}{m}x+b\end{cases}$，

消去y，得$(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m^2})x^2-\dfrac{2b}{m}x+b^2-1=0$，

$\because$直线$y=-\dfrac{1}{m}x+b$与椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$有两个不同的交点，

$\therefore \Delta=-2b^2+2+\dfrac{4}{m^2}>0$，①，

将 AB 中点$M(\dfrac{2mb}{m^2+2},\dfrac{m^2b}{m^2+2})$代入直线方程$y=mx+\dfrac{1}{2}$解得

$b=-\dfrac{m^2+2}{2m^2}$，②。

由①②得$m<-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$或$m>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

（3） 令$t=\dfrac{1}{m}\in(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$，则

$|AB|=\sqrt{t^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{-2t^4+2t^2+\dfrac{3}{2}}}{t^2+\dfrac{1}{2}}$，

且 O 到直线 AB 的距离为$d=\dfrac{t^2+\dfrac{1}{2}}{\sqrt{t^2+1}}$，

设ΔAOB的面积为$S(t)$，

$\therefore S(t)=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{-2(t^2-\dfrac{1}{2})^2+2}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$t^2=\dfrac{1}{2}$时，等号成立，

故ΔAOB面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20.

（1）由题意得，$a_{n+1}-a_n=-{a_n}^2\le 0$，即$a_{n+1}\le a_n$，$a_n\le\dfrac{1}{2}$，

由$a_n=(1-a_{n-1})a_{n-1}$

得$a_n=(1-a_{n-1})(1-a_{n-2})\cdots(1-a_1)a_1>0$，

由$0<a_n\le\dfrac{1}{2}$得，

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{a_n-{a_n}^2}=\dfrac{1}{1-a_n}\in[1,2]$，

即$1\le\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 2$；

（2）由题意得${a_n}^2=a_n-a_{n+1}$，

$\therefore S_n=a_1-a_{n+1}$①，

由$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$和$1\le\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 2$得，$1\le\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\le 2$，

$\therefore n\le\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_1}\le 2n$，因此$\dfrac{1}{2(n+1)}\le a_{n+1}\le\dfrac{1}{n+2}(n\in N^*)$②，

由①②得

$\dfrac{1}{2(n+2)}\le\dfrac{S_n}{n}\le\dfrac{1}{2(n+1)}$.