

## 2015 年天津卷高考数学试卷（文科）

### 一、选择题

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集  $A = \{2, 3, 5\}$ ，集合  $B = \{1, 3, 4, 6\}$ ，则集合  $A \cap C_U B =$

- (A)  $\{3\}$       (B)  $\{2, 5\}$       (C)  $\{1, 4, 6\}$       (D)  $\{2, 3, 5\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \end{cases}$ ，则目标函数的最大值为  $z = 3x + y$

- (A) 7      (B) 8      (C) 9      (D) 14

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出  $i$  的值为

- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5

4. 设  $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的

- (A) 充分而不必要条件      (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件      (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点为  $F(2, 0)$ ，

且双曲线的渐近线与圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 3$  相切，则双曲线的方程为

- (A)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$       (B)  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$       (C)  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

6. 如图，在圆  $O$  中， $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点，弦  $CD, CE$  分别经过点  $M, N$ ，若  $CM = 2, MD = 4, CN = 3$ ，则线段  $NE$  的长为

- (A)  $\frac{8}{3}$       (B) 3      (C)  $\frac{10}{3}$       (D)  $\frac{5}{2}$

7. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x) = 2^{x-m} - 1 (m \text{ 为实数})$

$a = f(\log_{0.5} 3), b = f(\log_2 5), c = f(2m)$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为

- (A)  $a < b < c$       (B)  $c < a < b$       (C)  $a < c < b$       (D)  $c < b < a$

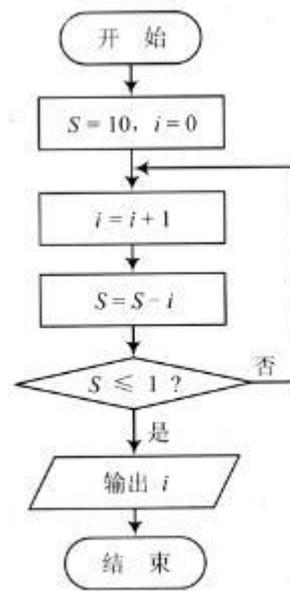
8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & x > 2 \end{cases}$ ，函数  $g(x) = 3 - f(2 - x)$ ，则函数  $y = f(x) - g(x)$  的零点的个数为

- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5

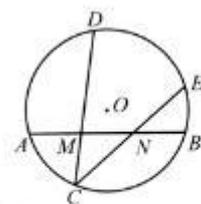
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.  $i$  是虚数单位，计算  $\frac{1 - 2i}{2 + i}$  的结果为\_\_\_\_\_。

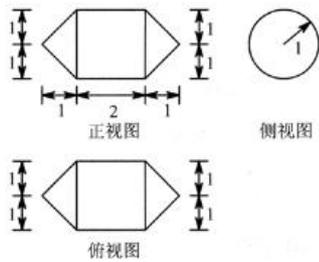
10. 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $m^3$ 。



第(3)题图



第(6)题图



第(10)题图

11. 已知函数  $f(x) = ax \ln x, x \in (0, +\infty)$ ，其中  $a$  为实数， $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数，若  $f'(1) = 3$ ，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 8$ ，则当  $a$  的值为\_\_\_\_\_时  $\log_2 a \cdot \log_2 (2b)$  取得最大值。

13. 在等腰梯形  $ABCD$  中，已知  $AB \parallel DC$ ， $AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ ，点  $E$  和点  $F$  分别在线段  $BC$  和  $DC$  上，且  $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ ，则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$ ，若函数  $f(x)$  在区间  $(-\omega, \omega)$  内单调递增，且函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = \omega$  对称，则  $\omega$  的值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。

15. (13 分) 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18，先采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员组队参加比赛。

(I) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员人数；

(II) 将抽取的 6 名运动员进行编号，编号分别为  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ，现从这 6 名运动员中随机抽取 2 人参加双打比赛。

(i) 用所给编号列出所有可能的结果；

(ii) 设  $A$  为事件“编号为  $A_5, A_6$  的两名运动员至少有 1 人被抽到”，求事件  $A$  发生的概率。

16. (13 分)  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ ， $b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$ ，

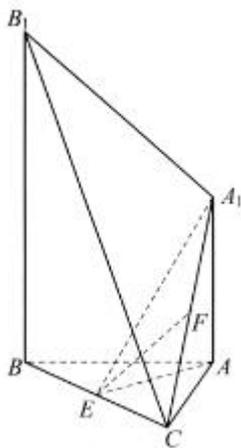
(I) 求  $a$  和  $\sin C$  的值；

(II) 求  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$  的值。

17. (13 分)

如图，已知  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $BB_1 \parallel AA_1$ ， $AB = AC = 3$ ， $BC = 2\sqrt{5}$ ， $AA_1 = \sqrt{7}$ ， $BB_1 = 2\sqrt{7}$ ，点  $E$ ， $F$  分别是  $BC$  和  $A_1C$  的中点，

- (I) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1B_1BA$  ;
- (II) 求证: 平面  $AEA_1 \perp$  平面  $BCB_1$  .
- (III) 求直线  $A_1B_1$  与平面  $BCB_1$  所成角的大小。



18. 已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列,  $\{b_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = b_1 = 1, b_2 + b_3 = 2a_3,$   
 $a_5 - 3b_2 = 7.$

- (1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $c_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}^*$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点为  $B$ , 左焦点为  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

- (1) 求直线  $BF$  的斜率;
- (2) 设直线  $BF$  与椭圆交于点  $P$  ( $P$  异于点  $B$ ), 过点  $B$  且垂直于  $BP$  的直线与椭圆交于点  $Q$  ( $Q$  异于点  $B$ ) 直线  $PQ$  与  $x$  轴交于点  $M$ ,  $|PM| = l|MQ|.$

(i) 求  $l$  的值;

(ii) 若  $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ , 求椭圆的方程.

20. 已知函数  $f(x) = 4x - x^4, x \in \mathbb{R},$

- (1) 求  $f(x)$  的单调性;
- (2) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$ , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$ , 求证: 对于任意的正实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x);$

(3) 若方程  $f(x) = a (a \text{ 为实数})$  有两个正实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 求证:  $x_2 - x_1 < -\frac{a}{3} + 4^{\frac{1}{3}}.$