上海数学（理工农医类）参考答案

一、（第 1 题至第 14 题）

1. $\{1,4\}$　　2. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$　　3. 16　　4. 4　　5. 2　　6. $\frac{\pi}{3}$　　7. 2

y

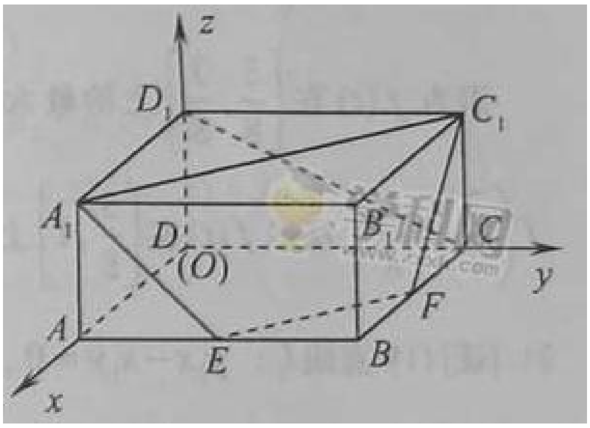
8. 120　　9. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　10. 4　　11. 45　　12. 0.2　　13. 8　　14. $-\frac{16}{15}$

二、（第 15 至 18 题）

题号	15	16	17	18
代号	B	D	B	A

三、（第 19 至 23 题）

19. 解：如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系，可得有关点的坐标为 $A_1(2，0，1)$、$C_1(0，2，1)$、$E(2，1，0)$、F（1，2，0）、C（0、2、0）、D（0,0,1）.



因为 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{A_1C_1}$，　因此直线 A_1C 与 EF 共面，

即，A_1、C_1、F、E 四点共面.

设平面 A_1C_1EF 的法向量为 $\vec{n}=(u,v,w)$，

则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{EF}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{FC_1}$，

又 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{FC_1}=(-1,0,1)$，

故 $\begin{cases}-u+v=0,\\-u+w=0,\end{cases}$ 解得 $u=v=w$.

取 u=1，则平面 A_1C_1EF 的一个法向量 $\vec{n}=(1,1,1)$.又 $\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,1)$，

故 $\dfrac{\overrightarrow{CD_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CD_1}\right|\cdot|\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

因此直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成的角的大小 $\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

20. 解：(1) $t_1=\dfrac{3}{8}$，

设乙到 C 时甲所在地为 D，则 AD=$\dfrac{15}{8}$ 千米。

在△ACD 中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A$，

所以 $f(t_1)=CD=\dfrac{3}{8}\sqrt{41}$（千米）。

（2）甲到达 B 用时 1 小时；乙到达 C 用时 $\dfrac{3}{8}$ 小时，从 A 到 B 总用时 $\dfrac{7}{8}$ 小时。

当 $t_1=\dfrac{3}{8}\le t\le\dfrac{7}{8}$ 时，

$f(t)=\sqrt{(7-8t)^2+(5-5t)^2-2(7-8t)(5-5t)\times\dfrac{4}{5}}=\sqrt{25t^2-42t+18}$；

当 $\dfrac{7}{8}\le t\le 1$ 时，$f(t)$=5-5t.

所以 $f(t)=\begin{cases}\sqrt{25t^2-42t+18},\dfrac{3}{8}\le t\le\dfrac{7}{8}\\ 5-5t,\dfrac{7}{8}<t\le 1\end{cases}$

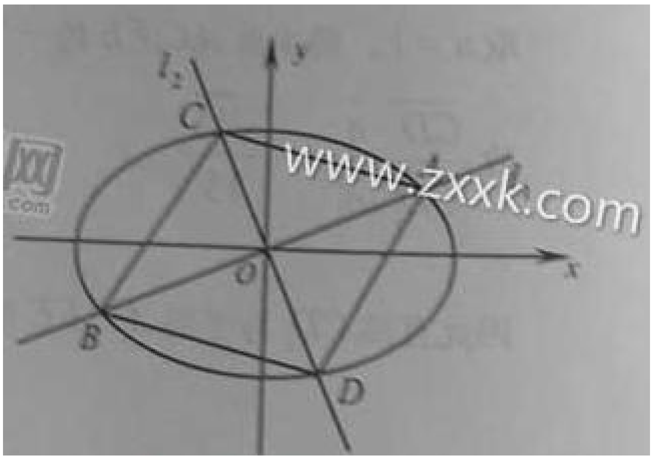
因为 $f(t)$ 在 $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{7}{8}\right]$ 上的最大值是 $f(\dfrac{3}{8})=\dfrac{3}{8}\sqrt{41}$，$f(t)$ 在 $\left[\dfrac{7}{8},1\right]$ 上的最大值是 $f(\dfrac{7}{8})=\dfrac{5}{8}$，所以 $f(t)$ 在 $\left[\dfrac{3}{8},1\right]$ 上的最大值是 $\dfrac{3}{8}\sqrt{41}$，不超过 3.

21. 证：(1) 直线 $l_1:y_1x-x_1y=0$，点 C 到 l_1 的距离 $d=\dfrac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$、

$|AB|=2|AO|=2\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，

所以 $S=2S_{\triangle ABC}=2\times\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=2|x_1y_2-x_2y_1|$.

（2）设 $l_1:y=kx$，则 $l_2:y=\dfrac{1}{2k}x$，设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$.



由 $\begin{cases} y=kx, \\ x^2+2y^2=1, \end{cases}$ 得 $x_1^{\ 2}=\dfrac{1}{1+2k^2}$.

同理 $x_2^{\ 2}=\dfrac{1}{1+2(-\dfrac{1}{2k})^2}=\dfrac{2k^2}{2k^2+1}$.

由（1），

$$S=2\left|x_1y_2-x_2y_1\right|=2\left|\frac{x_1x_2}{2k}+x_2\cdot kx_1\right|=\frac{2k^2+1}{|k|}\cdot\left|x_1x_2\right|$$

$$=\frac{(2k^2+1)\left|\sqrt{2}\right|k}{|k|\sqrt{1+2k^2}\cdot\sqrt{2k^2+1}},$$

整理得 $S=\sqrt{2}$.

22. 解（1）由于 $b_{n+1}-b_n=3$，得 $a_{n+1}-a_n=6$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 6 的等差数列，

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=6n-5$，$n\in N^*$.

证（2）$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，得 $a_{n+1}-2b_{n+1}=a_n-2b_n$.

所以 $\{a_n-2b_n\}$ 为常数列，$a_n-2b_n=a_1-2b_1$，即 $a_n=2b_n+a_1-2b_1$.

因为 $a_{n_0}\ge a_n$，$n\in N^*$，所以 $2b_{n_0}+a_1-2b_1\ge 2b_n+a_1-2b_1$, 即 $b_{n_0}\ge b_n$.

故 $\{b_n\}$ 是第 n_0 项是最大项。

解：（3）因为 $b_n=\lambda^n$，所以 $a_{n+1}-a_n=2(\lambda^{n+1}-\lambda^n)$

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2(\lambda^n-\lambda^{n-1})+2(\lambda^{n-1}-\lambda^{n-2})+\cdots+2(\lambda^2-\lambda)+\lambda$

$=2\lambda^n-\lambda$.

当 n=1 时，$a_1=\lambda$，符合上式.

所以$a_n=2\lambda^n-\lambda$.

因为$\lambda<0$，所以$a_{2n}=2|\lambda|^{2n}-\lambda>-\lambda, a_{2n-1}=-2|\lambda|^{2n-1}-\lambda<-\lambda.$

①当$\lambda<-1$时，由指数函数的单调性知，$\{a_n\}$不存在最大、最小值；

②当$\lambda=-1$时，$\{a_n\}$的最大值为 3，最小值为−1，而$\frac{3}{-1}\notin(-2,2)$;

③$-1<\lambda<0$时，由指数函数的单调性知，$\{a_n\}$的最大值$M=a_2=2\lambda^2-\lambda$，最小值$m=a_1=\lambda$，由

$-2<\frac{2\lambda^2-\lambda}{\lambda}<2$及$-1<\lambda<0$，得$\frac{1}{2}<\lambda<0$.

综上，λ的取值范围是$(-\frac{1}{2},0)$.

23 证明（1）易见$h(x)=x+\sin\frac{x}{3}$的定义域为 R,

对任意$x\in R, h(x+6\pi)=x+6\pi+\sin\frac{x+6\pi}{3}=h(x)+6\pi$，

所以$\cos h(x+6\pi)=\cos(h(x)+6\pi)=\cos h(x)$，

即$h(x)$是以6π为余弦周期的余弦周期函数。

（2）由于$f(x)$的值域为 R，所以对任意$c\in[f(a),f(b)]$，c 都是一个函数值，即有

$x_0\in R$，使得$f(x_0)=c$。

若$x_0<a$，则由$f(x)$单调递增得到$c=f(x_0)<f(a)$，与$c\in[f(a),f(b)]$矛盾，所以. $x_0\geq a$，同理可证$x_0\leq b$. 故存在$x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)=c$.

（3）若u_0为$\cos f(x)=1$在$[0,T]$上的解，则, $\cos f(u_0)=1$, 且$u_0+T\in[T,2T]$,

$\cos f(u_0+T)=\cos f(u_0)=1$, 即$u_0+T$为方程$\cos f(x)=1$在$[T,2T]$上的解.

同理，若u_0+T为方程$\cos f(x)=1$在$[T,2T]$上的解.则u_0为该方程在$[0,T]$上的解.

以下证明最后一部分结论.

由（2）所证知存在$0=x_0<x_1<x_2<x_3<x_4=T$, 使得$f(x_i)=i\pi$，i=0, 1, 2, 3, 4.

而$\left[x_i, x_{i+1}\right]$是函数$\cos f(x)$的单调区间，i=0, 1, 2, 3.

与之前类似地可以证明：u_0是$\cos f(x)=-1$在$\left[0,T\right]$上的解当且仅当u_0+T是$\cos f(x)=-1$在$\left[T,2T\right]$上的解.从而$\cos f(x)=\pm 1$在$\left[0,T\right]$与$\left[T,2T\right]$上的解的个数相同.

故$f(x_i+T)=f(x_i)+4\pi, i=0,1,2,3,4$.

对于$x\in\left[0,x_1\right], f(x)\in\left[0,\pi\right], f(x+T)\in\left[4\pi,5\pi\right]$.

而$\cos f(x+T)=\cos f(x)$, 做$f(x+T)=f(x)+4\pi=f(x)+f(T)$

类似地,当$x\in\left[x_i, x_{i+1}\right]$，i=1,2,3 时，有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$

结论成立.