

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

上海 数学试卷（理工农医类）

一、填空题（本大题共有 14 题，满分 56 分。）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对 4 分，否则一律得零分。

1. 设全集 $U = \mathbb{R}$. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ _____.

2. 若复数 z 满足 $3z + \bar{z} = 1 + i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z =$ _____.

3. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$, 解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, 则 $c_1 - c_2 =$ _____.

4. 若正三棱柱的所有棱长均为 a , 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

5. 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p =$ _____.

6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π , 则其母线与轴的夹角的大小为 _____.

7. 方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为 _____.

8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为 _____ (结果用数值表示).

9. 已知点 P 和 Q 的横坐标相同, P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍, P 和 Q 的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2 . 若 C_1 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 则 C_2 的渐近线方程为 _____.

10. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$ 的反函数, 则 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 的最大值为 _____.

11. 在 $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中, x^2 项的系数为 _____ (结果用数值表示).

12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $E\xi_1 - E\xi_2 =$ _____ (元).

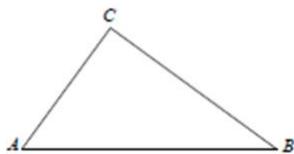
13. 已知函数 $f(x) = \sin x$. 若存在 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$, 且

$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$ ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^*$), 则 m 的最小值为 _____.

地出发匀速前往B地, 经过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是AB, 速度为5千米/小时, 乙的路线是ACB, 速度为8千米/小时. 乙到达B地后原地等待. 设 $t=t_1$ 时乙到达C地.

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是3千米. 当 $t_1 \leq t \leq 1$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1, 1]$ 上得最大值是否超过3? 说明理由.



21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题6分, 第2小题8分.

已知椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别于椭圆交于A、B和C、D, 记得到的平行四边形ABCD的面积为 S .

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 用A、C的坐标表示点C到直线 l_1 的距离, 并证明 $S = 2|x_1y_1 - x_2y_2|$;

(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求面积 S 的值.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题. 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 若 $b_n = 3n + 5$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0} > a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1 = \lambda < 0$, $b_n = \lambda^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m , 且 $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

对于定义域为 \mathbb{R} 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 \mathbb{R} . 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0$, $f(T) = 4\pi$.

(1) 验证 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 是以 6π 为周期的余弦周期函数;

(2) 设 $a < b$. 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = c$;

(3) 证明：“ u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上得解”的充要条件是“ $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上有解”，并证明对任意 $x \in [0, T]$ 都有 $f(x + T) = f(x) + f(T)$.