2020年海南省新高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.（5分）设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x|2<x\leqslant 3\}$　　B．$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　　C．$\{x|1\leqslant x<4\}$　　D．$\{x|1<x<4\}$

【解答】解：∵集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，

$\therefore A\cup B=\{x|1\leqslant x<4\}$．

故选：C．

2.（5分）$\frac{2-i}{1+2i}=$（　　）

A．1　　B．－1　　C．i　　D．$-i$

【解答】解：$\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5i}{1+4}=-i$，

故选：D．

3.（5分）6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，则不同的安排方法共有（　　）

A．120种　　B．90种　　C．60种　　D．30种

【解答】解：因为每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，

甲场馆从6人中挑一人有：$C_6^1=6$种结果；

乙场馆从余下的5人中挑2人有：$C_5^2=10$种结果；

余下的3人去丙场馆；

故共有：$6\times 10=60$种安排方法；

故选：C．

4.（5分）日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球（球心记为 O），地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面．在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬40°，则晷针与点 A 处的水

平面所成角为（　　）

A．20°　　　　B．40°　　　　C．50°　　　　D．90°

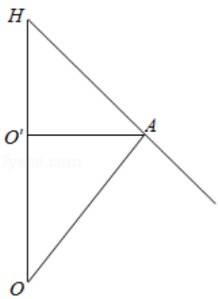
【解答】解：可设 A 所在的纬线圈的圆心为 O'，OO'垂直于纬线所在的圆面，

由图可得$\angle OHA$ 为晷针与点 A 处的水平面所成角，

又$\angle OAO'$为 40° 且 $OA\perp AH$，

在 Rt$\triangle OHA$ 中，$O'A\perp OH$，$\therefore\angle OHA=\angle OAO'=40°$，

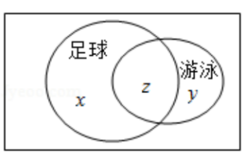
故选：B．



5．（5 分）某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是（　　）

A．62%　　　　B．56%　　　　C．46%　　　　D．42%

【解答】解：设只喜欢足球的百分比为 x，只喜欢游泳的百分比为 y，两个项目都喜欢的



百分比为 z，

由题意，可得 $x+z=60$，$x+y+z=96$，$y+z=82$，解得 $z=46$．

$\therefore$该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 46%．

故选：C.

6.（5 分）基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数．基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间．在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t（单位：天）的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$．有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$．据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为（　　）（$ln2\approx0.69$）

A．1.2 天　　B．1.8 天　　C．2.5 天　　D．3.5 天

【解答】解：把 $R_0=3.28$，$T=6$ 代入 $R_0=1+rT$，可得 $r=0.38$，$\therefore I(t)=e^{0.38t}$，

当 $t=0$ 时，$I(0)=1$，则 $e^{0.38t}=2$，

两边取对数得 $0.38t=ln2$，解得 $t=\frac{\ln 2}{0.38}\approx1.8$.

故选：B.

7.（5 分）已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是（　　）

A．$(-2，6)$　　B．$(-6，2)$　　C．$(-2，4)$　　D．$(-4，6)$

【解答】解：画出图形如图，

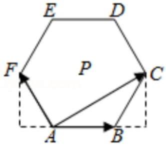
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos<\overrightarrow{AP}，\overrightarrow{AB}>$，它的几何意义是 AB 的长度与$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$向量的投影的乘积，显然，P 在 C 处时，取得最大值，$|\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=|\overrightarrow{AB}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=3$，可得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos<\overrightarrow{AP}，\overrightarrow{AB}>=2\times3=6$，最大值为 6，

在 F 处取得最小值，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos<\overrightarrow{AP}，\overrightarrow{AB}>=-2\times2\times\frac{1}{2}=-2$，最小值为 -2，

P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是 $(-2，6)$.

故选：A.



8．（5 分）若定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，0）单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　B．$[-3,-1]\cup[0,1]$　C．$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　D．$[-1,0]\cup[1,3]$

【解答】解：∵定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，0）单调递减，且 $f(2)=0$，

∴$f(x)$ 的图象如图：

当 $x=0$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，

当 $x=1$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，

当 $x-1=2$ 或 $x-1=-2$ 时，即 $x=3$ 或 $x=-1$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，

当 $x>0$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 等价为 $f(x-1)\geqslant 0$，

此时 $\begin{cases}x>0\\0<x-1\leqslant 2\end{cases}$，此时 $1<x\leqslant 3$，

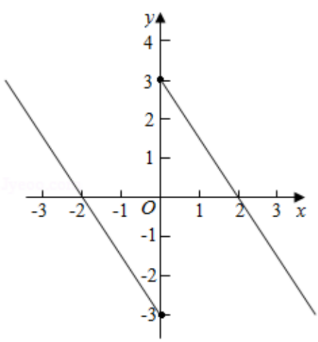
当 $x<0$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 等价为 $f(x-1)\leqslant 0$，

即 $\begin{cases}x<0\\-2\leqslant x-1<0\end{cases}$，得 $-1\leqslant x<0$，

综上 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 3$，

即实数 x 的取值范围是 $[-1,0]\cup[1,3]$，

故选：D.



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．（5 分）已知曲线 C：$mx^2+ny^2=1$．（　　）

A．若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B．若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C．若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D．若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

【解答】解：A．若 $m>n>0$，则$\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$，则根据椭圆定义，知$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 正确；

B．若 $m=n>0$，则方程为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$，表示半径为$\frac{1}{\sqrt{n}}$的圆，故 B 错误；

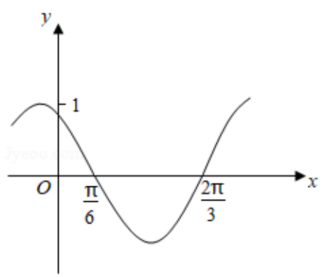
C．若 $m<0$，$n>0$，则方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，表示焦点在 y 轴的双曲线，

故此时渐近线方程为 $x=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}y$，故 C 错误；

D．当 $m=0$，$n>0$ 时，则方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$表示两条直线，故 D 正确；

故选：AD．

10．（5 分）如图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）



A．$\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　　B．$\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

C．$\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　　D．$\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

【解答】解：由图象知函数的周期 $T=2\times(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\pi$，即$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$，

由五点对应法得 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\pi$，

得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，

则 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{2\pi}{3})=\cos(-2x-\frac{\pi}{6})=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

故选：BC．

11．已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则（　　）

A．$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　　　B．$2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C．$\log_2a+\log_2b\geqslant-2$　　　　D．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

【解答】解：①已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，所以 $(a+b)^2\leqslant2a^2+2b^2$，则 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，故 A 正确．

②利用分析法：要证 $2^{a-b}>\frac{1}{2}$，只需证明 $a-b>-1$ 即可，即 $a>b-1$，由于 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，所以：$a>0$，$b-1<0$，故 B 正确．

③ $\log_2a+\log_2b=\log_2ab\leqslant\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=-2$，故 C 错误．

④由于 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，

利用分析法：要证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$ 成立，只需对关系式进行平方，整理得 $a+b+2\sqrt{ab}\leqslant2$，即 $2\sqrt{ab}\leqslant1$，故 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立．故 D 正确．

故选：ABD．

12．信息熵是信息论中的一个重要概念．设随机变量 X 所有可能的取值为 1，2，…，n，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2p_i$．（　　）

A．若 $n=1$，则 $H(X)=0$

B．若 $n=2$，则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

C．若 $p_i=\frac{1}{n}$（$i=1$，2，…，n），则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

D．若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为 1，2，…，m，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$（$j=1$，2，…，m），则 $H(X)\leqslant H(Y)$

【解答】解：A．若 $n=1$，则 $P_1=1$，故 $H(x)=-p_1\log_2p_1=-1\times\log_21=0$，故 A 正确；

B．若 $n=2$，则 $p_1+p_2=1$，$H(x)=-(p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2)=-[p_1\log_2p_1+(1-p_1)\log_2(1-p_1)]$，

设 $f(p)=-[p\log_2p+(1-p)\log_2(1-p)]$，$0<p<1$，

则 $f'(p)=-[\log_2p+p\cdot\frac{1}{\ln2\cdot p}-\log_2(1-p)+(1-p)\cdot\frac{-1}{(1-p)\ln2}]=-\log_2\frac{p}{1-p}$，

令$f'(p)<0$，解得$\frac{1}{2}<p<1$，此时函数$f(p)$单调递减，

令$f'(p)>0$，解得$0<p<\frac{1}{2}$，此时函数$f(p)$单调递增，故B错误；

C．若$p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则$H(x)=-n\cdot\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}=\log_2 n$，

由对数函数的单调性可知，$H(x)$随着n的增大而增大，故C正确；

D．依题意知，$P(Y=1)=p_1+p_{2m}$，$P(Y=2)=p_2+p_{2m-1}$，

$P(Y=3)=p_3+p_{2m-2}$，…，$P(Y=m)=p_m+p_{m+1}$，

$\therefore H(Y)=-[(p_1+p_{2m})\log_2(p_1+p_{2m})+(p_2+p_{2m-1})\log_2(p_2+p_{2m-1})$

$+\cdots+(p_m+p_{m+1})\log_2(p_m+p_{m+1})]$，

又$H(X)=-(p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_m\log_2p_m+\cdots+p_{2m}\log_2p_{2m})$，

$\therefore H(Y)-H(X)=p_1\log_2\frac{p_1}{p_1+p_{2m}}+p_2\log_2\frac{p_2}{p_2+p_{2m-1}}+\cdots+p_{2m}\log_2\frac{p_{2m}}{p_1+p_{2m}}$，

又$\frac{p_1}{p_1+p_{2m}}<1$，$\frac{p_2}{p_2+p_{2m-1}}<1$，…，$\frac{p_{2m}}{p_1+p_{2m}}<1$，

$\therefore H(Y)-H(X)<0$，$\therefore H(X)>H(Y)$，故D错误．

故选：AC．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，满分20分。

13．（5分）斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线C：$y^2=4x$的焦点，且与C交于A，B两点，则$|AB|=$__$\frac{16}{3}$__．

【解答】解：由题意可得抛物线焦点$F(1,0)$，直线l的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$，

代入$y^2=4x$并化简得$3x^2-10x+3=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{10}{3}$；

$x_1x_2=1$，

$\therefore$由抛物线的定义可得$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$．

故答案为：$\frac{16}{3}$．

14．（5分）将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前n项和为__$3n^2-2n$__．

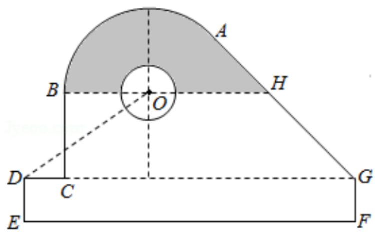
【解答】解：将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，

则$\{a_n\}$是以 1 为首项、以 6 为公差的等差数列，

故它的前 n 项和为 $n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2-2n$，

故答案为：$3n^2-2n$．

15．（5 分）某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示．O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心，A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点，B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点，四边形 $DEFG$ 为矩形，$BC\perp DG$，垂足为 C，$\tan\angle ODC=\frac{3}{5}$，$BH\parallel DG$，$EF=12cm$，$DE=2cm$，$A$ 到直线 DE 和 EF 的距离均为 $7cm$，圆孔半径为 $1cm$，则图中阴影部分的面积为__$\frac{5}{2}\pi+4$__cm^2．



【解答】解：

作 AM 垂直于 EF，交 OH、DG 于 S、N，垂足为 M，过点 O 作 OQ 垂直于 DQ，垂足为 Q，

∵A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 $7cm$，∴$EM=AM=7$，

又∵$EF=12$，$MN=DE=2$，

∴$NG=MF=12-7=5$，$AN=AM-NM=7-2=5$，

∴$\angle AGD=45°$，∵$BH\parallel DG$，∴$\angle AHD=45°$，

由于 AG 是圆弧的切线，

∴$AG\perp OA$，$\angle AOH=45°$，

设大圆的半径为 R，则 $AS=OS=\frac{R}{\sqrt{2}}$，

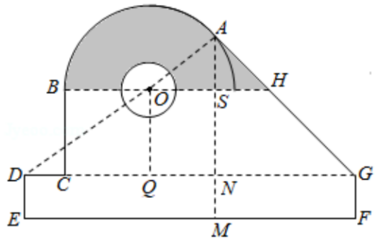
$OQ=SN=5-\frac{R}{\sqrt{2}}$，$DQ=DN-QN=7-\frac{R}{\sqrt{2}}$，

∵$\tan\angle ODC=\frac{3}{5}$，∴$\frac{5-\frac{R}{\sqrt{2}}}{7-\frac{R}{\sqrt{2}}}=\frac{3}{5}$，解得 $R=2\sqrt{2}$，

图中阴影部分面积分为扇形 AOB 和直角△AOH 的面积减去小半圆的面积，

所以 $S_{阴影}=\frac{135}{360}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times\pi\times 1=\frac{5}{2}\pi+4$.

故答案为：$\frac{5}{2}\pi+4$.



16.（5 分）已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$．以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为__$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$__.

【解答】解：由题意直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$．可知：$D_1B_1=2$，上下底面是菱形，建立如图所示的平面直角坐标系，设 P（x，y），则 $D_1E^2=D_1B_1^2+x^2-2\times D_1B_1\times\cos 60°=x^2+4-2x$.

由题意可知 $D_1P=\sqrt{5}$.

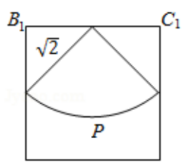
可得：$5=x^2+4-2x+(2-y)^2$.

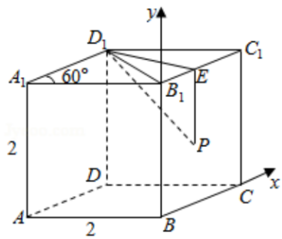
即 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$，

所以 P 在侧面 BCC_1B_1 的轨迹是以 B_1C_1 的中点为圆心，半径为$\sqrt{2}$的圆弧.

以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为：$\frac{1}{4}\times 2\sqrt{2}\pi=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.





四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在△ABC，它的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，_______？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

【解答】解：①$ac=\sqrt{3}$.

△ABC 中，$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，即 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

$ac=\sqrt{3}$，$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{a}$，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}}{\frac{2\sqrt{3}a^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=1$．

②$c\sin A=3$．

△ABC 中，$c\sin A=a\sin C=a\sin\frac{\pi}{6}=3$，$\therefore a=6$．

$\because \sin A=\sqrt{3}\sin B$，即 $a=\sqrt{3}b$，$\therefore b=2\sqrt{3}$.

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{36+12-c^2}{2\times6\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore c=2\sqrt{3}$.

③$c=\sqrt{3}b$.

$\because \sin A=\sqrt{3}\sin B$，即 $a=\sqrt{3}b$，

又$\because c=\sqrt{3}b$，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{6}\neq\cos\frac{\pi}{6}$，

与已知条件 $C=\frac{\pi}{6}$相矛盾，所以问题中的三角形不存在．

18．（12 分）已知公比大于 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=20$，$a_3=8$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$．

【解答】解：（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q（$q>1$），

则$\begin{cases}a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20\\a_3=a_1q^2=8\end{cases}$，

$\because q>1$，$\therefore\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$．

（2）$a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$

$=2^3-2^5+2^7-2^9+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot2^{2n+1}$，

$=\frac{2^3[1-(-2^2)^n]}{1-(-2^2)}=\frac{8}{5}-(-1)^n\frac{2^{2n+3}}{5}$．

19．（12 分）为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 $PM2.5$ 和 SO_2 浓度（单位：$\mu g/m^3$），得下表：

SO_2 / $PM2.5$	[0，50]	（50，150]	（150，475]
[0，35]	32	18	4
（35，75]	6	8	12
（75，115]	3	7	10

（1）估计事件“该市一天空气中 $PM2.5$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

（2）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

SO_2 / $PM2.5$	[0，150]	（150，475]
[0，75]		

（75，115]		

（3）根据（2）中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天空气中$PM2.5$浓度与SO_2浓度有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

P（$K^2\geqslant k$）	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【解答】解：（1）用频率估计概率，从而得到“该市一天空气中$PM2.5$浓度不超过75，且SO_2浓度不超过150”的概率$P=\dfrac{32+18+6+8}{100}=0.64$；

（2）根据所给数据，可得下面的2×2列联表：

SO_2 / $PM2.5$	[0，150]	（150，475]
[0，75]	64	16
（75，115]	10	10

（3）根据（2）中的列联表，

由$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(64\times16-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}=7.484>6.635$，

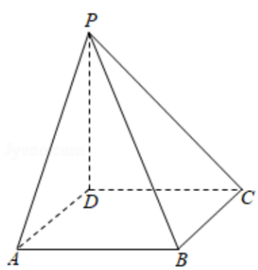
P（$K^2\geqslant6.635$）$=0.01$；

故有99%的把握认为该市一天空气中$PM2.5$浓度与SO_2浓度有关，

20.（12分）如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为正方形，$PD\perp$底面$ABCD$．设平面PAD与平面PBC的交线为l．

（1）证明：$l\perp$平面PDC；

（2）已知$PD=AD=1$，Q为l上的点，求PB与平面QCD所成角的正弦值的最大值．



【解答】解：（1）证明：过 P 在平面 PAD 内作直线 $l // AD$，

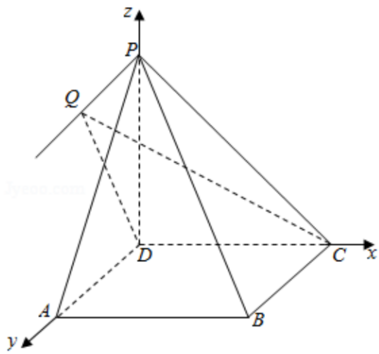
由 $AD // BC$，可得 $l // BC$，即 l 为平面 PAD 和平面 PBC 的交线，

$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp BC$，

又 $BC\perp CD$，$CD\cap PD=D$，$\therefore BC\perp$ 平面 PCD，

$\because l // BC$，$\therefore l\perp$ 平面 PCD；

（2）如图，以 D 为坐标原点，直线 DA，DC，DP 所在的直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 D（0，0，0），C（1，0，0），A（0，1，0），P（0，0，1），

设 Q（0，m，1）（$m>0$），$\overrightarrow{DQ}=$（0，m，1），$\overrightarrow{PB}=$（1，1，-1），$\overrightarrow{DC}=$（1，0，0），

设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{n}=$（a，b，c），

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=0\\ mb+c=0\end{cases}$，取 $c=1$，可得 $\overrightarrow{n}=\left(0,\ -\dfrac{1}{m},\ 1\right)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{n},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{-1-\dfrac{1}{m}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}}$，

$\therefore PB$ 与平面 QCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{1+\dfrac{1}{m}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}}{1+\dfrac{1}{m^2}}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{m+\dfrac{1}{m}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，当且仅当 $m=1$ 取等号，

∴PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

21.（12 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过点 M（2，3），点 A 为其左顶点，且 AM 的斜率为$\frac{1}{2}$.

（1）求 C 的方程；

（2）点 N 为椭圆上任意一点，求△AMN 的面积的最大值.

【解答】解：（1）由题意可知直线 AM 的方程为：$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x-2y=-4$，

当 $y=0$ 时，解得 $x=-4$，所以 $a=4$，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=l$（$a>b>0$）过点 M（2，3），

可得$\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1$，解得 $b^2=12$，

所以 C 的方程：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=l$.

（2）设与直线 AM 平行的直线方程为：$x-2y=m$，当直线与椭圆相切时，与 AM 距离比较远的直线与椭圆的切点为 N，此时△AMN 的面积取得最大值.

$x-2y=m$ 代入椭圆方程：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=l$.

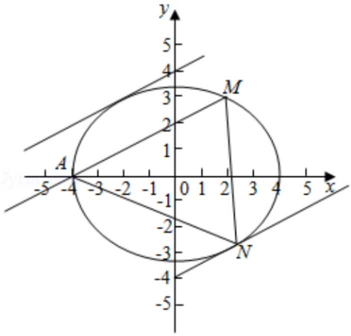
化简可得：$16y^2+12my+3m^2-48=0$，所以△$=144m^2-4\times16(3m^2-48)=0$，即 $m^2=64$，解得 $m=\pm8$，

与 AM 距离比较远的直线方程：$x-2y=8$，

利用平行线之间的距离为：$d=\frac{8+4}{\sqrt{1+4}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

$|AM|=\sqrt{(2+4)^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

所以△AMN 的面积的最大值：$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=12$.



22．（12分）已知函数$f(x)=ae^{x-1}-lnx+lna$．

（1）当$a=e$时，求曲线$y=f(x)$在点（1，$f(1)$）处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若$f(x)\geqslant 1$，求a的取值范围．

【解答】解：（1）当$a=e$时，$f(x)=e^x-lnx+1$，

$\therefore f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

$\therefore f'(1)=e-1$，

$\because f(1)=e+1$，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点（1，$f(1)$）处的切线方程为$y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，

当$x=0$时，$y=2$，当$y=0$时，$x=\frac{-2}{e-1}$，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点（1，$f(1)$）处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积$S=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{e-1}=\frac{2}{e-1}$．

（2）方法一：由$f(x)\geqslant 1$，可得$ae^{x-1}-lnx+lna\geqslant 1$，即$e^{x-1+lna}-lnx+lna\geqslant 1$，

即$e^{x-1+lna}+lna+x-1\geqslant lnx+x=e^{lnx}+lnx$，

令$g(t)=e^t+t$，

则$g'(t)=e^t+1>0$，

$\therefore g(t)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

$\therefore g(lna+x-1)>g(lnx)$

$\therefore lna+x-1>lnx$，

即$lna>lnx-x+1$，

令 $h(x)=\ln x-x+1$，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(x)\leqslant h(1)=0$，

$\therefore \ln a\leqslant 0$，

$\therefore a\geqslant 1$，

故 a 的范围为$[1,+\infty)$.

方法二：由 $f(x)\geqslant 1$ 可得 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$，

即 $ae^{x-1}-1\geqslant \ln x-\ln a$，

设 $g(x)=e^x-x-1$，

$\therefore g'(x)=e^x-1>0$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore g(x)>g(0)=1-0-1=0$，

$\therefore e^x-x-1>0$，

即 $e^x>x-1$，

再设 $h(x)=x-1-\ln x$，

$\therefore h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=0$，

$\therefore x-1-\ln x\geqslant 0$，

即 $x-1\geqslant \ln x$

$\because a>0$，

$\therefore e^{x-1}\geqslant x$，则 $ae^{x-1}\geqslant ax$，

此时只需要证 $ax\geqslant x-\ln a$，

即证 $x(a-1)\geqslant -\ln a$，

当 $a\geqslant 1$ 时，

$\therefore a\geqslant 1$，$x(a-1)>0>-\ln a$ 恒成立，

当 $0<a<1$ 时，$x(a-1)<0<-\ln a$，此时 $x(a-1)\geqslant-\ln a$ 不成立，

综上所述 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.

方法三：由题意可得 $x\in(0,+\infty)$，$a\in(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$,

易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

①当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=a-1<0$，$f'\left(\frac{1}{a}\right)=a^{\frac{1}{e}-1}-a=a\left(e^{\frac{1}{a}-1}\right)>0$,

$\therefore$存在 $x_0\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 使得 $f'(x_0)=0$,

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)<f(1)=a+\ln a<a<1$，不满足题意，

②当 $a\geqslant1$ 时，$e^{x-1}>0$，$\ln a>0$,

$\therefore f(x)\geqslant e^{x-1}-\ln x$,

令 $g(x)=e^{x-1}-\ln x$,

$\therefore g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$,

易知 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\because g'(1)=0$,

$\therefore$当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(1)=1$,

即 $f(x)\geqslant1$,

综上所述 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.

方法四：$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，$x>0$，$a>0$,

$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$,

易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\because$存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，则 $\ln a+x_0-1=-\ln x_0$，即 $\ln a=1-x_0-\ln x_0$,

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)\geqslant f(x_0)=ae^{x_0-1}-lnx_0+lna=\frac{1}{x_0}-lnx_0+1-x_0-lnx_0=\frac{1}{x_0}-2lnx_0+1-x_0\geqslant 1$

$\therefore \frac{1}{x_0}-2lnx_0-x_0\geqslant 0$

设 $g(x)=\frac{1}{x}-2lnx-x$，

易知函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(1)=1-0-1=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$g(x)\geqslant 0$，

$\therefore x_0\in(0,1]$ 时，$\frac{1}{x_0}-2lnx_0-x_0\geqslant 0$，

设 $h(x)=1-x-lnx$，$x\in(0,1]$，

$\therefore h'(x)=-1-\frac{1}{x}<0$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=1-1-ln1=0$，

当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to+\infty$，

$\therefore lna\geqslant 0=ln1$，

$\therefore a\geqslant 1$.