文科数学试题参考答案

一、 选择题

（1）C　（2）A　（3）C　（4）B　（5）D

（6）B　（7）A　（8）C　（9）B　（10）D

二、填空题

（11）13　（12）7　（13）$\frac{3}{2}$　（14）$\sqrt{2}$　（15）$2+\sqrt{3}$

三、解答题

（16）

解：（I）由调查数据可知，既未参加书法社团又未参加演讲社团的有 30 人，

故 至少参加上述一个社团的共有$45-30=15$人，

所以 从该班随机选 1 名同学，该同学至少参加上述一个社团的概率为

$p=\frac{15}{45}=\frac{1}{5}$.

（II）从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，其一切可能的结果组成的基本事件有；

$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},$

$\{A_2,B_3\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\},\{A_4,B_1\},$

$\{A_4,B_2\},\{A_4,B_3\},\{A_5,B_1\},\{A_5,B_2\},\{A_5,B_3\},$

共 15 个.

根据题意，这些基本事件的出现是等可能的.

事件“A_1被选中且B_1未被选中”所包含的基本事件有：

$\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$, 共 2 个.

因此A_1被选中且B_1未被选中的概率为$p=\frac{2}{15}$.

（17）

解：在ΔABC中，由$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin(A+B)=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

因为$\sin C<\sin B$,所以$C<B$,可知C为锐角，

所以$\cos C=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

因此
$$\begin{aligned}\sin A&=\sin(B+C)\\&=\sin B\cos C+\cos B\sin C\\&=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

可得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}c}{\frac{\sqrt{6}}{9}}=2\sqrt{3}c$,

又$ac=2\sqrt{3}$, 所以$c=1$.

（18）

（I）证法一：

连接$DG,CD,$设$CD\cap GF=M$，连接$MH.$

在三棱台$DEF-ABC$中，

$AB=2DE,G$为AC的中点，

可得 DF//GC,DF=GC,

所以四边形 DFCG 为平行四边形.

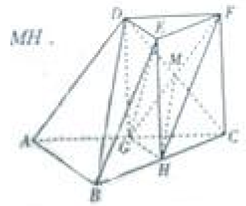
则 M 为 CD 的中点，又 H 为 BC 的中点，

所以 HM//BD,

又 HM$\subset$平面 FGH，BD$\not\subset$平面 FGH，

所以 BD//平面 FGH.

证法二：



在三棱台 DEF－ABC 中，

由 BC=2EF，H 为 BC 的中点，

可得 BH//EF,BH=EF,

所以四边形 HBEF 为平行四边形，

可得 BE//HF.

在ΔABC中，G 为 AC 的中点，H 为 BC 的中点，

所以 GH//AB.

又 GH$\cap$HF=H，

所以平面 FGH//平面 ABED，

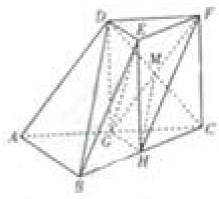
因为 BD$\subset$平面 ABED，

所以平面 BD//平面 FGH.

（II）证明：连接 HE.

因为 G，H 分别 AC，BC 的中点，

所以 GH//AB.



由 AB$\perp$BC，得 GH$\perp$BC.

又 H 为 BC 的中点，

所以 EF//HC,EF=HC,

因此四边形 EFCH 是平行四边形，

所以 CF//HE,

又 CF$\perp$BC，所以 HE$\perp$BC。

又 HE，GH$\subset$平面 EGH，HE$\cap$GH=H，

所以 BC$\perp$平面 EGH。

又 BC$\subset$平面 BCD.

所以平面 BCD$\perp$平面 EGH.

(19)

解：（I）设数列$\{a_n\}$**的公差为**d.

令$n=1$，得$\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{3}$，

所以$a_1a_2=3$.

令$n=2$，得$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{5}$，

所以$a_2a_3=15$.

解得$a_1=1$，$d=2$，

所以$a_n=2n-1$.

(II)由（I）知$b_n=2n\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 4^n$，

所以$T_n=1\cdot 4^1+2\cdot 4^2+\cdots+n\cdot 4^n$，

所以$4T_n=1\cdot 4^2+2\cdot 4^3+\cdots n\cdot 4^{n+1}$，

两式相减，得$-3T_n=4^1+4^2+\cdots 4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$$=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}$$

$$=\frac{1-3n}{9}\times 4^{n+1}-\frac{4}{3}.$$

所以$T_n=\dfrac{3n-1}{9}\times 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{4+(3n-1)4^{n+1}}{9}.$

（20）

解：（I）由题意知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 2，

所以 $f(1)=2$，

又 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1,$

所以 $a=1$.

（II） $k=1$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的根.

设 $h(x)=f(x)-g(x)=(x+1)\ln x-\frac{x^2}{e^x},$

当 $x\in(0,1]$ 时，$h(x)<0$.

又 $h(2)=3\ln 2-\frac{4}{e^2}=\ln 8-\frac{4}{e^2}>1-1=0,$

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使 $h(x_0)=0$.

因为 $h^x(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1+\frac{x(x-2)}{e^x},$

所以当 $x\in(1,2)$ 时，$h^x(x)>1-\frac{1}{e}>0,$

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h^x(x)>0,$

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 单调递增.

所以 $k=1$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 内存在唯一的根.

（III）由（II）知 方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的根 x_0，

且 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<g(x)$，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)$，

得到 $m(x)=\begin{cases}(x+1)\ln x, x\in(0,x_0]\\ \frac{x^2}{e^x}, x\in(x_0,+\infty)\end{cases}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，若 $x\in(0,1]$, $m(x)\le 0;$

若 $x\in(1,x_0)$, 由 $m'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1>0,$

可知 $0<m(x)\le m(x_0)$.

故 $m(x)\le m(x_0)$.

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$m'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x},$

可得 $x\in(x_0,2)$ 时，$m'(x)>0, m(x)$ 单调递增；

$x\in(2,+\infty)$ 时，$m'(x)<0, m(x)$ 单调递减；

可知$m(x)\le m(2)=\dfrac{4}{e^2}$, 且$m(x_0)<m(2)$.

综上可得函数$m(x)$的最大值为$\dfrac{4}{e^2}$.

（21）

解：（I）由题意知$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1,$

又$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a^2=4,b^2=1$.

所以 椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1.$

（II） 由（I）知椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（i） 设$P(x_0,y_0),\dfrac{|OQ|}{|OP|}=\lambda,$

由题意知$Q(-\lambda x_0,-\lambda y_0)$.

因为$\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1.$

又$\dfrac{(-\lambda x_0)^2}{16}+\dfrac{(-\lambda y_0)^2}{4}=1$，即$\dfrac{\lambda^2}{4}(\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2)=1.$

所以$\lambda=2$，即$\dfrac{|OQ|}{|OP|}=2.$

（ii.）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 E 的方程，

可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$ ，

由 $\Delta>0$, 可得 $m^2<4+16k^2$ ……………………①

则有 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4m^2-16}{1+4k^2}.$

所以 $|x_1-x_2|=\dfrac{4\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}.$

因为直线 $y=kx+m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0,m)$，

所以 ΔOAB 的面积

$$S=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{2|m|\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}=\frac{2\sqrt{(16k^2+4-m^2)m^2}}{1+4k^2}=2\sqrt{(4-\frac{m^2}{1+4k^2})\frac{m^2}{1+4k^2}}.$$

设 $\dfrac{m^2}{1+4k^2}=t.$

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程，

可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$ ，

由 $\Delta\ge 0$, 可得 $m^2\le 1+4k^2$ ……………………②

由①②可知 $0<t\le 1$,

因此 $S=2\sqrt{(4-t)t}=2\sqrt{-t^2+4t}$

故 $S\le 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $t=1$，即 $m^2=1+4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$.

由（i）知，ΔABQ 的面积为 $3S$，

所以 ΔABQ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.