

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

数学（文科）

第 I 卷（共 50 分）

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，共 4 页。满分 150 分。考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$ ， $B = \{x | (x-1)(x-3) < 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) (1,3) (B) (1,4) (C) (2,3) (D) (2,4)

(2) 若复数 z 满足 $\frac{z}{1-i} = i$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z =$

- (A) $1-i$ (B) $1+i$ (C) $-1-i$ (D) $-1+i$

(3) 设 $a = 0.6^{0.6}$, $b = 0.6^{1.5}$, $c = 1.5^{0.6}$ ，则 a, b, c 的大小关系是

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$

(4) 要得到函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y = \sin 4x$ 的图象

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
(C) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

(5) 设 $m \in R$ ，命题“若 $m > 0$ ，则方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的逆否命题是

- (A) 若方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根，则 $m > 0$
(B) 若方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根，则 $m \leq 0$
(C) 若方程 $x^2 + x - m = 0$ 没有实根，则 $m > 0$
(D) 若方程 $x^2 + x - m = 0$ 没有实根，则 $m \leq 0$

(6) 为比较甲、乙两地某月 14 时的气温状况，随机选取该月中的 5 天，将这 5 天中 14 时的气温数据(单位:°C)制成如图所示的茎叶图。考虑以下结论:

①甲地该月 14 时的平均气温低于乙地该月 14 时的平均气温;

②甲地该月 14 时的平均气温高于乙地该月 14 时的平均气温;

③甲地该月 14 时的气温的标准差小于乙地该月 14 时的气温的标准差;

甲		乙
9 8 6	2	8 9
1 1	3	0 1 2

④甲地该月 14 时的气温的标准差大于乙地该月 14 时的气温的标准差.
其中根据茎叶图能得到的统计结论的编号为

- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

(7) 在区间 $[0,2]$ 上随机地取一个数 x ，则事件“ $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 1$ ”发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

(8) 若函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - a}$ 是奇函数，则使 $f(x) > 3$ 成立的 x 的取值范围为

- (A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(1, +\infty)$

(9) 已知等腰直角三角形的直角边的长为 2，将该三角形绕其斜边所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为

- (A) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{2}\pi$ (D) $4\sqrt{2}\pi$

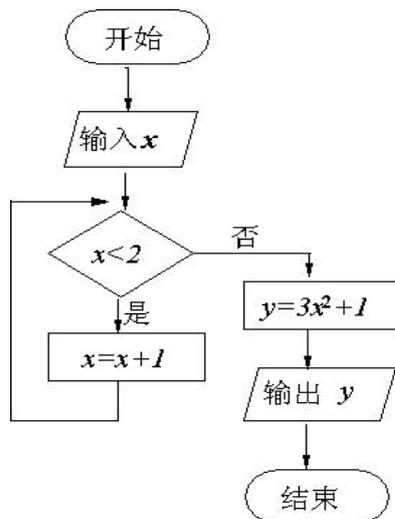
(10) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x - b, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1, \end{cases}$ 若 $f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right) = 4$ ，则 $b =$

- (A) 1 (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{1}{2}$

第 II 卷 (共 100 分)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 执行右边的程序框图，若输入的 x 的值为 1，则输出的 y 的值是_____。



(12) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y-x \leq 1, \\ x+y \leq 3, \\ y \geq 1, \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$

的最大值为_____。

(13) 过点 $P(1, \sqrt{3})$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，则 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} =$ _____。

(14) 定义运算“ \otimes ”： $x \otimes y = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ ($x, y \in R, xy \neq 0$)。

当 $x > 0, y > 0$ 时， $x \otimes y + (2y) \otimes x$ 的最小值为_____。

(15) 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点作一条与其渐近线平行的直线，交 C 于点 P ，若点 P 的横坐标为 $2a$ 则 C 的离心率为_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分

(16) (本小题满分 12 分) 某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法社团和演讲社团的情况，数据如下表：(单位：人)

	参加书法社团	未参加书法社团
参加演讲社团	8	5
未参加演讲社团	2	30

(I) 从该班随机选 1 名同学，求该同学至少参加上述一个社团的概率；

(II) 在既参加书法社团又参加演讲社团的 8 名同学中，有 5 名男同学 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ，3 名女同学 B_1, B_2, B_3 ，现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，求 A_1 被选中且 B_1 未被选中的概率。

(17) (本小题满分 12 分)

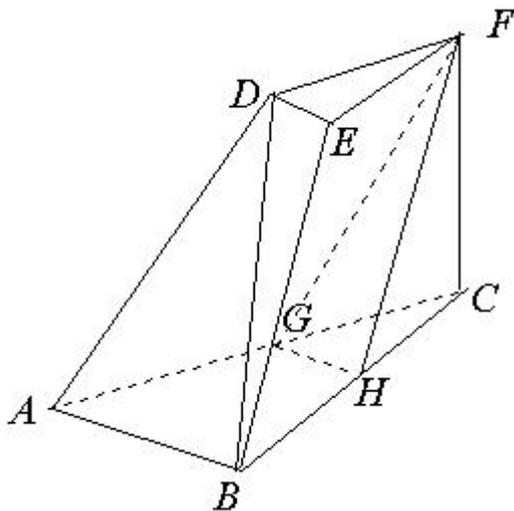
ΔABC 中，角 A, B, C 所对的边分别为

a, b, c ，已知 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\sin(A+B) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ ， $ac = 2\sqrt{3}$ ，求 $\sin A$ 和 c 的值。

(18) (本小题满分 12 分)

如图，三棱台 $DEF-ABC$ 中，



$AB = 2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点,

(I) 求证: $BD \parallel$ 平面 FGH ;

(II) 若 $CF \perp BC, AB \perp BC$, 求证: 平面 $BCD \perp$ 平面 FGH .

(19) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等差数列, 数列 $\{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为

$$\frac{n}{2n+1}.$$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = (a_n + 1) \cdot 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(20) (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = (x+a)\ln x, g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x - y = 0$ 平行。

(I) 求 a 的值;

(II) 是否存在自然数 k , 使的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根? 如果存在, 求出 k ; 如果不存在, 请说明理由;

(III) 设函数 $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值), 求 $m(x)$ 的最大值.

(21) (本小题满分 14 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上,

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y = kx + m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .

(i) 求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;

(ii) 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值。