

绝密★启用前

2015 年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)
理科数学

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分,共 4 页。满分 150 分。考试用时 120 分钟。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

1.答卷前,考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。

2.第 I 卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答案写在试卷上无效。

3.第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置,不能写在试卷上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

4.填空题直接填写答案,解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。
参考公式:

如果事件 A,B 互斥,那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 。

第 I 卷 (共 50 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的

(1) 已知集合 $A=\{X|X^2-4X+3<0\}$, $B=\{X|2<X<4\}$,则 $A\cap B=$

(A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)

(2) 若复数 Z 满足 $\frac{\bar{Z}}{1-i}=i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $Z=$

(A) $1-i$ (B) $1+i$ (C) $-1-i$ (D) $-1+i$

(3) 要得到函数 $y=\sin(4x-\frac{\pi}{3})$ 的图像, 只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图像 ()

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

(C) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

(4) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a , $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$

(A) $-\frac{3}{2}a^2$ (B) $-\frac{3}{4}a^2$ (C) $\frac{3}{4}a^2$ (D) $\frac{3}{2}a^2$

(5) 不等式 $|x-1|-|x-5|<2$ 的解集是

(A) $(-\infty, 4)$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) $(1, 4)$ (D) $(1, 5)$

(6) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 若 $z=ax+y$ 的最大值为 4, 则 $a=$
 (A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

(7) 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AD \parallel BC$, $BC=2AD=2AB=2$. 将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为
 (A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{3}$ (D) 2π

(8) 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布 $N(0, 3^2)$, 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 $(3, 6)$ 内的概率为
 (附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 68.26\%$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 95.44\%$.)
 (A) 4.56% (B) 13.59% (C) 27.18% (D) 31.74%

(9) 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为 ()

(A) $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

(10) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则满足 $f(f(a)) = 2^{f(a)}$ 的 a 的取值范围是 ()

(A) $[\frac{2}{3}, 1]$ (B) $[0, 1]$

(C) $[\frac{2}{3}, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

第 II 卷 (共 100 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 观察下列各式:

$$C_1^0 = 4^0$$

$$C_3^0 + C_3^1 = 4^1;$$

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = 4^2;$$

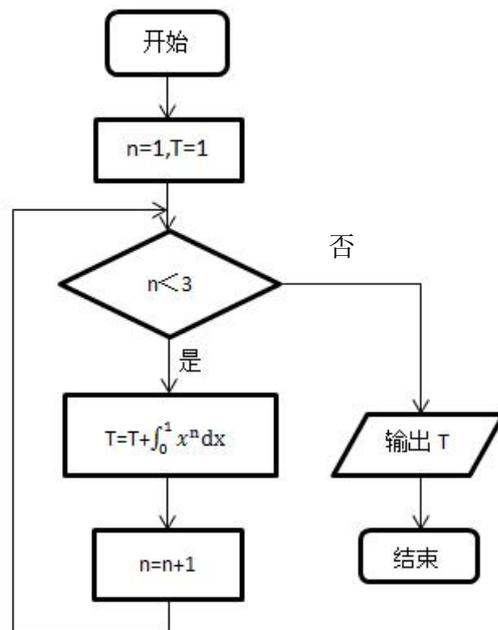
$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 4^3;$$

.....

照此规律, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时,

$$C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(12) 若 “ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \tan x \leq m$ ” 是真命题, 则实数 m 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$



(13) 执行右边的程序框图, 输出的 T 的值为_____.

(14) 已知函数 $f(x) = a^x + b (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a + b =$ _

(15) 平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与抛物线 $C_2:$

$x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 O , 若 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点, 则 C_1 的离心率为 _____

三、解答题: 本答题共 6 小题, 共 75 分。

(16) (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = 0, a = 1$,

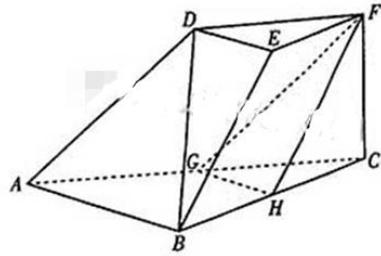
求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

(17) (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱台 $DEF-ABC$ 中, $AB = 2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点。

(I) 求证: $BC \parallel$ 平面 FGH ;

(II) 若 $CF \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $CF = DE$, $\angle BAC = 45^\circ$, 求平面 FGH 与平面 $ACFD$ 所成的角 (锐角) 的大小。



(18) (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $2S_n = 3^n + 3$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n b_n = \log_3^2$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(19) (本小题满分 12 分)

若 n 是一个三位正整数, 且 n 的个位数字大于十位数字, 十位数字大于百位数字, 则称 n 为“三位递增数” (如 137, 359, 567 等).

在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次. 得分规则如下: 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除, 参加者得 0 分; 若能被 5 整除, 但不能被 10 整除, 得 -1 分; 若能被 10 整除, 得 1 分.

(I) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;

(II) 若甲参加活动, 求甲得分 X 的分布列和数学期望 EX .

(20) (本小题满分 13 分)

平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 以 F_1 为圆心以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1, P$ 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线

$y = kx + m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .

(i) 求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;

(ii) 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

(21) (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = \ln(x+1) + \alpha(x^2 - x)$, 其中 $\alpha \in R$ 。

(I) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数, 并说明理由;

(II) 若 $\forall x > 0, f(x) \geq 0$ 成立, 求 α 的取值范围。