参考答案

1. $(2,4)$

2. -3

3. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 1.76

5. ± 3

6. $\log_2(x-1)$

7. -2

8. $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$

9. 112

10. $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

11. $\dfrac{1}{6}$

12. $\left[-1,\sqrt{2}\right]$

13. $\left(2,+\infty\right)$

14. 4

15. A

16. D

17. B

18. D

19. 解：（1）由题意可知，圆柱的母线长 $l=1$，底面半径 $r=1$．

圆柱的体积 $\mathrm{V}=\pi r^2 l=\pi\times 1^2\times 1=\pi$，

圆柱的侧面积 $S=2\pi rl=2\pi\times 1\times 1=2\pi$．

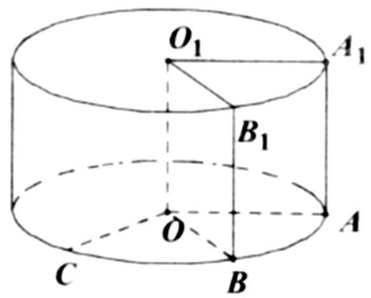
（2）设过点 $\mathrm{B_1}$ 的母线与下底面交于点 B，则 $\mathrm{O_1B_1}//\mathrm{OB}$，

所以 $\angle\mathrm{COB}$ 或其补角为 $\mathrm{O_1B_1}$ 与 OC 所成的角.

由 $\overset{\frown}{\mathrm{A_1B_1}}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$，可知 $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{A_1O_1B_1}=\dfrac{\pi}{3}$，

由 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 长为 $\dfrac{5\pi}{6}$，可知 $\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{5\pi}{6}$，$\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{AOC}-\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，

所以异面直线 $\mathrm{O_1B_1}$ 与 OC 所成的角的大小为 $\dfrac{\pi}{2}$.



20.解：（1）因为C上的点到直线EH与到点F的距离相等，所以C是以F为焦点、以EH为准线的抛物线在正方形EFGH内的部分，其方程为$y^2=4x$（$0<y<2$）.

（2）依题意，点M的坐标为$\left(\frac{1}{4},1\right)$.

所求的矩形面积为$\frac{5}{2}$，而所求的五边形面积为$\frac{11}{4}$.

矩形面积与“经验值”之差的绝对值为$\left|\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{6}$，而五边形面积与“经验值”之差的绝对值为$\left|\frac{11}{4}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{12}$，所以五边形面积更接近于$S_1$面积的“经验值”.

21.解：（1）设$\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right)$.

由题意，$\mathrm{F}_2(c,0)$，$c=\sqrt{1+b^2}$，$y_{\mathrm{A}}^2=b^2\left(c^2-1\right)=b^4$，

因为$\Delta\mathrm{F_1AB}$是等边三角形，所以$2c=\sqrt{3}\left|y_{\mathrm{A}}\right|$，

即$4\left(1+b^2\right)=3b^4$，解得$b^2=2$.

故双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

（2）由已知，$\mathrm{F}_2(2,0)$.

设$\mathrm{A}\left(x_1,y_1\right)$，$\mathrm{B}\left(x_2,y_2\right)$，直线$l: y=k(x-2)$.

由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，得$\left(k^2-3\right)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$.

因为l与双曲线交于两点，所以$k^2-3\neq0$，且$\Delta=36\left(1+k^2\right)>0$.

由$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$，得$\left(x_1-x_2\right)^2=\dfrac{36\left(k^2+1\right)}{\left(k^2-3\right)^2}$，

故$\left|\mathrm{AB}\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{6\left(k^2+1\right)}{\left|k^2-3\right|}=4$，

解得$k^2=\dfrac{3}{5}$，故l的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

22.解：（1）因为$4\notin\mathrm{A}$，$4\notin\mathrm{B}$，所以$4\notin\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$，

从而$\left\{a_n\right\}$与$\left\{b_n\right\}$不是无穷互补数列.

（2）因为$a_4=16$，所以$b_{16}=16+4=20$.

数列$\left\{b_n\right\}$的前16项的和为$\left(1+2+\cdots+20\right)-\left(2+2^2+2^3+2^4\right)$

$\dfrac{1+20}{2}\times20-\left(2^5-2\right)=180$.

（3）设$\left\{a_n\right\}$的公差为d，$d\in\mathrm{N}^*$，则$a_{16}=a_1+15d=36$.

由$a_1=36-15d\geq1$，得$d=1$或2.

若$d=1$，则$a_1=21$，$a_n=n+20$，与“$\left\{a_n\right\}$与$\left\{b_n\right\}$是无穷互补数列”矛盾；

若$d=2$，则$a_1=6$，$a_n=2n+4$，$b_n=\begin{cases}n,n\leq5\\2n-5,n>5\end{cases}$.

综上，$a_n=2n+4$，$b_n=\begin{cases}n,n\leq5\\2n-5,n>5\end{cases}$.

23.解：（1）由$\log_2\left(\dfrac{1}{x}+1\right)>1$，得$\dfrac{1}{x}+1>2$，

解得$x\in\left(0,1\right)$.

（2）$\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)+\log_2\left(x^2\right)=0$有且仅有一解，

等价于$\left(\dfrac{1}{x}+a\right)x^2=1$有且仅有一解，等价于$ax^2+x-1=0$有且仅有一解.

当$a=0$时，$x=1$，符合题意；

当$a\neq0$时，$\Delta=1+4a=0$，$a=-\dfrac{1}{4}$.

综上，$a=0$ 或 $-\dfrac{1}{4}$.

（3）当 $0<x_1<x_2$ 时，$\dfrac{1}{x_1}+a>\dfrac{1}{x_2}+a$，$\log_2\left(\dfrac{1}{x_1}+a\right)>\log_2\left(\dfrac{1}{x_2}+a\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减.

函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[t,t+1\right]$ 上的最大值与最小值分别为 $f\left(t\right)$，$f\left(t+1\right)$.

$f\left(t\right)-f\left(t+1\right)=\log_2\left(\dfrac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\dfrac{1}{t+1}+a\right)\le 1$ 即 $at^2+\left(a+1\right)t-1\ge 0$，对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 成立.

因为 $a>0$，所以函数 $y=at^2+\left(a+1\right)t-1$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，$t=\dfrac{1}{2}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{3}{4}a-\dfrac{1}{2}$，由 $\dfrac{3}{4}a-\dfrac{1}{2}\ge 0$，得 $a\ge\dfrac{2}{3}$.

故 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.