参考答案

1. $(2,4)$

2. -3

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 1.76

5. $\log_2(x-1)$

6. $2\sqrt{2}$

7. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

8. 112

9. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

10. $(2,+\infty)$

11. 4

12. $[0,1+\sqrt{2}]$

13. 4

14. $\frac{5}{28}$

15.A

16.D

17.B

18.D

19. （1）由题意可知，圆柱的高$h=1$，底面半径$r=1$.

由$\overset{\frown}{A_1B_1}$的长为$\frac{\pi}{3}$，可知$\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{3}$.

$$S_{\Delta O_1A_1B_1}=\frac{1}{2}O_1A_1\cdot O_1B_1\cdot\sin\angle A_1O_1B_1=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$V_{C-O_1A_1B_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta O_1A_1B_1}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

（2）设过点B_1的母线与下底面交于点B，则$BB_1//AA_1$，

所以$\angle CB_1B$或其补角为直线B_1C与AA_1所成的角.

由 $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\frac{2\pi}{3}$，可知 $\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$，

又 $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle COB=\frac{\pi}{3}$，

从而 ΔCOB 为等边三角形，得 $CB=1$.

因为 $B_1B\perp$ 平面 AOC，所以 $B_1B\perp CB$.

在 ΔCB_1B 中，因为 $\angle B_1BC=\frac{\pi}{2}$，$CB=1$，$B_1B=1$，所以 $\angle CB_1B=\frac{\pi}{4}$，

从而直线 B_1C 与 AA_1 所成的角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

20. （1）因为 C 上的点到直线 EH 与到点 F 的距离相等，所以 C 是以 F 为焦点、以 EH 为准线的抛物线在正方形 EFGH 内的部分，其方程为 $y^2=4x$（$0<y<2$）.

（2）依题意，点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$.

所求的矩形面积为 $\frac{5}{2}$，而所求的五边形面积为 $\frac{11}{4}$.

矩形面积与“经验值”之差的绝对值为 $\left|\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{6}$，而五边形面积与“经验值”之差的绝对值为 $\left|\frac{11}{4}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{12}$，所以五边形面积更接近于 S_1 面积的“经验值”.

考点：1. 抛物线的定义及其标准方程；2. 面积.

21（1）设 $A(x_A,y_A)$.

由题意，$F_2(c,0)$，$c=\sqrt{1+b^2}$，$y_A^2=b^2(c^2-1)=b^4$，

因为 ΔF_1AB 是等边三角形，所以 $2c=\sqrt{3}|y_A|$，

即 $4(1+b^2)=3b^4$，解得 $b^2=2$.

故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

（2）由已知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $l: y=k(x-2)$. 显然 $k\neq 0$.

由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，得$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$.

因为l与双曲线交于两点，所以$k^2-3\neq 0$，且$\Delta=36(1+k^2)>0$.

设AB的中点为$\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})$.

由$(\overrightarrow{\mathrm{F_1A}}+\overrightarrow{\mathrm{F_1B}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$即$\overrightarrow{\mathrm{F_1M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，知$\mathrm{F_1M}\perp\mathrm{AB}$，故$k_{\mathrm{F_1M}}\cdot k=-1$.

而$x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，$y_{\mathrm{M}}=k(x_{\mathrm{M}}-2)=\dfrac{6k}{k^2-3}$，$k_{\mathrm{F_1M}}=\dfrac{3k}{2k^2-3}$，

所以$\dfrac{3k}{2k^2-3}\cdot k=-1$，得$k^2=\dfrac{3}{5}$，故$l$的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

22.解：（1）由$\log_2\left(\dfrac{1}{x}+5\right)>0$，得$\dfrac{1}{x}+5>1$，

解得$x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)\cup(0,+\infty)$.

（2）$\dfrac{1}{x}+a=(a-4)x+2a-5$，$(a-4)x^2+(a-5)x-1=0$，

当$a=4$时，$x=-1$，经检验，满足题意.

当$a=3$时，$x_1=x_2=-1$，经检验，满足题意.

当$a\neq 3$且$a\neq 4$时，$x_1=\dfrac{1}{a-4}$，$x_2=-1$，$x_1\neq x_2$.

x_1是原方程的解当且仅当$\dfrac{1}{x_1}+a>0$，即$a>2$；

x_2是原方程的解当且仅当$\dfrac{1}{x_2}+a>0$，即$a>1$.

于是满足题意的$a\in(1,2]$.

综上，a的取值范围为$(1,2]\cup\{3,4\}$.

（3）当$0<x_1<x_2$时，$\dfrac{1}{x_1}+a>\dfrac{1}{x_2}+a$，$\log_2\left(\dfrac{1}{x_1}+a\right)>\log_2\left(\dfrac{1}{x_2}+a\right)$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$， $f(t+1)$.

$f(t)-f(t+1)=\log_2\left(\frac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\frac{1}{t+1}+a\right)\le 1$ 即 $at^2+(a+1)t-1\ge 0$，对任意

$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 成立.

因为 $a>0$，所以函数 $y=at^2+(a+1)t-1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增， $t=\frac{1}{2}$ 时， y

有最小值 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}$， 由 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}\ge 0$，得 $a\ge\frac{2}{3}$.

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

23. 解析：（1）因为 $a_5=a_2$， 所以 $a_6=a_3$， $a_7=a_4=3$， $a_8=a_5=2$.

于是 $a_6+a_7+a_8=a_3+3+2$， 又因为 $a_6+a_7+a_8=21$， 解得 $a_3=16$.

（2） $\{b_n\}$ 的公差为 20， $\{c_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{3}$，

所以 $b_n=1+20(n-1)=20n-19$， $c_n=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{5-n}$.

$a_n=b_n+c_n=20n-19+3^{5-n}$.

$a_1=a_5=82$， 但 $a_2=48$， $a_6=\frac{304}{3}$， $a_2\ne a_6$，

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质 P.

（3）[证]充分性：

当 $\{b_n\}$ 为常数列时， $a_{n+1}=b_1+\sin a_n$.

对任意给定的 a_1， 只要 $a_p=a_q$， 则由 $b_1+\sin a_p=b_1+\sin a_q$， 必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$.

充分性得证.

必要性：

用反证法证明. 假设 $\{b_n\}$ 不是常数列，则存在 $k\in\mathrm{N}^*$，

使得 $b_1=b_2=\cdots=b_k=b$， 而 $b_{k+1}\ne b$.

下面证明存在满足 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n$ 的 $\{a_n\}$，使得 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$，但 $a_{k+2}\neq a_{k+1}$．

设 $f(x)=x-\sin x-b$，取 $m\in\mathrm{N}^*$，使得 $m\pi>|b|$，则

$f(m\pi)=m\pi-b>0$，$f(-m\pi)=-m\pi-b<0$，故存在 c 使得 $f(c)=0$．

取 $a_1=c$，因为 $a_{n+1}=b+\sin a_n$（$1\leq n\leq k$），所以 $a_2=b+\sin c=c=a_1$，

依此类推，得 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=c$．

但 $a_{k+2}=b_{k+1}+\sin a_{k+1}=b_{k+1}+\sin c\neq b+\sin c$，即 $a_{k+2}\neq a_{k+1}$．

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质 P，矛盾.

必要性得证.

综上，“对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 P”的充要条件为“$\{b_n\}$ 是常数列”．