2016年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

理科数学答案

（1）【解析】通解设 $z=a+bi\ (a,b\in R)$，则 $\overline{z}=a-bi$．

故 $2z+\overline{z}=2(a+bi)+a-bi=3a+bi$=3-2i，

所以 $\begin{cases}3a=3\\b=-2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$，所以 $z=1-2i$．故选 B.

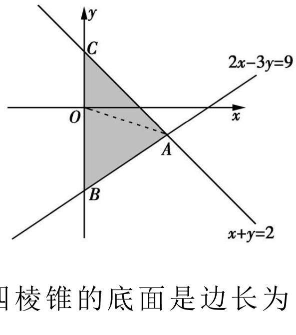
光速解法：设 $z=a+bi\ (a,b\in R)$，由复数的性质可得 $z+\overline{z}=2a$，故 $2z+\overline{z}=(z+\overline{z})+z$，故 $2z+\overline{z}$ 的虚部就是 z 的虚部，实部是 z 的实部的 3 倍．故 $z=1-2i$，选 B.

（2）【解析】集合 A 表示函数 $y=2^x$ 的值域，故 $A=(0,+\infty)$．由 $x^2-1<0$，得 $-1<x<1$，故 $B=(-1,1)$，所以 $A\bigcup B=(-1,+\infty)$．故选 C.

（3）【解析】由频率分布直方图可知，这 200 名学生每周的自习时间不少于 22.5 小时的频率为(0.16+0.08+0.04)×2.5=0.7，故这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数为 200×0.7=140．故选 D.

（4）【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示，设 $P(x,y)$为平面区域内任意一点，则 x^2+y^2 表示 $|OP|^2$．显然，当点 P 与点 A 重合时，$|OP|^2$ 即 x^2+y^2 取得最大值．由 $\begin{cases}x+y=2\\2x-3y=9\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$，故 A(3，－1).

所以 x^2+y^2 的最大值为 32+$(-1)^2$=10．故选 C.



（5）【解析】由三视图可知，四棱锥的底面是边长为 1 的正方形，高为 1，其体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times1^2\times1=\dfrac{1}{3}$．设半球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{2}$，即 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以半球的体积

$V_2=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$．故该几何体的体积$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$．故选 C.

（6）【解析】若直线a,b相交，设交点为P，则$P\in a,P\in b$，又$a\subset\alpha,b\subset\beta$，所以$P\in\alpha,P\in\beta$，故$\alpha,\beta$相交．反之，若$\alpha,\beta$相交，则$a,b$可能相交，也可能异面或平行．故“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的充分不必要条件．故选 A.

（7）【解析】由题意得$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})\times2\cos(x+\frac{\pi}{6})=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，故该函数的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．故选 B.

（8）【解析】由$\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$可得$\boldsymbol{n}\cdot(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=0$，即$t\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^2=0$，

所以$t=-\frac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}=-\frac{\boldsymbol{n}^2}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>}=-\frac{|\boldsymbol{n}|^2}{|\boldsymbol{m}|\times|\boldsymbol{n}|\times\frac{1}{3}}=-3\frac{|\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|}=-3\times\frac{4}{3}=-4$．

故选 B.

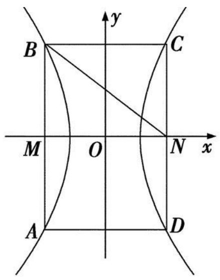
（9）【解析】当$-1\leq x\leq 1$时，$f(x)$为奇函数，且当$x>\frac{1}{2}$时，$f(x+1)=f(x)$，所以$f(6)=f(5\times1+1)=f(1)$．而$f(1)=-f(-1)=-[(-1)^3-1]=2$，所以$f(6)=2$，故选 D.

（10）【解析】设函数$y=f(x)$的图象上两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则由导数的几何意义可知，点 P，Q 处切线的斜率分别为$k_1=f'(x_1)$，$k_2=f'(x_2)$若函数具有 T 性质,则$k_1\cdot k_2=f'(x_1)\ f'(x_2)=-1$. 对于 A 选项，$f'(x)=\cos x$，显然$k_1\cdot k_2=\cos x_1\cos x_2=-1$有无数组解，所以该函数具有 T 性质；对于 B 选项，$f'(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，显然$k_1\cdot k_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$无解，故该函数不具有 T 性质；对于 C 选项，$f'(x)=e^x>0$，显然$k_1\cdot k_2=e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$无解，故该函数不具有 T 性质；对于 D 选项，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，显然$k_1\cdot k_2=3x_1^2\cdot3x_2^2=-1$无解，故该函数不具有 T 性质．故选 A.

（11）【解析】输入 a=0,b=9，第一次循环：a=0+1=1，b=9-1=8，i=1+1=2；第二次循环：a=1+2=3，b=8-2=6，i=2+1=3；第三次循环：a=3+3=6，b=6-3=3，$a>b$ 成立，所以输出 i 的值为 3.

（12）【解析】$(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r(ax^2)^{5-r}x^{-\frac{r}{2}}=C_5^r a^{5-r}\cdot x^{10-\frac{5}{2}r}$，令 $10-\dfrac{5}{2}r=5$，得 $r=2$，所以 $C_5^2a^3=-80$，解得 $a=-2$．

（13）【解析】如图,由题意不妨设$|AB|=3$，则$|BC|=2$．设 AB，CD 的中点分别为 M，N，则在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中，$|MN|=2c=2$，故$|BN|=\sqrt{|BM|^2+|MN|^2}=\sqrt{(\dfrac{3}{2})^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$．由双曲线的定义可得$2a=|BN|-|BM|=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$，而$2c=|MN|=2$，所以双曲线的离心率$e=\dfrac{2c}{2a}=2$．



（14）【解析】圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 的圆心为$C(5,0)$，半径$r=3$，故由直线与圆相交可得 $\dfrac{|5k-0|}{\sqrt{k^2+1}}<r$，即$\dfrac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}<3$，整理得$k^2<\dfrac{9}{16}$，得$-\dfrac{3}{4}<k<\dfrac{3}{4}$．

（15）【解析】由题意，当$x>m$时，$f(x)=x^2-2mx+4m=(x-m)^2+4m-m^2$，其顶点为$(m,4m-m^2)$；当$x\leqslant m$时，函数$f(x)$的图象与直线$x=m$的交点为$Q(m,m)$．

①当$\begin{cases}m>0\\4m-m^2\geqslant m\end{cases}$，即$0<m\leqslant 3$时，函数$f(x)$的图象如图 1 所示，此时直线$y=b$与函数$f(x)$的图象有一个或两个不同的交点，不符合题意；

②当$\begin{cases}4m-m^2<m\\m>0\end{cases}$，即$m>3$时，函数$f(x)$的图象如图 2 所示，则存在实数$b$满足$4m-m^2<b\leqslant m$，使得直线$y=b$与函数$f(x)$的图象有三个不同的交点，符合题意．

综上，m的取值范围为$(3,+\infty)$．

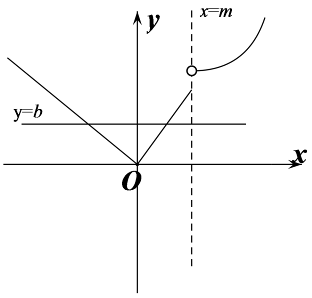


图 1

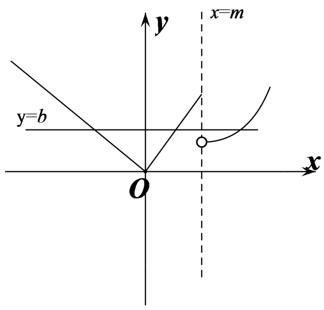


图 2

（16）【解析】(Ⅰ)由 $2(\tan A+\tan B)=\dfrac{\tan A}{\cos B}+\dfrac{\tan B}{\cos A}$

得 $2\times\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin A}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin B}{\cos A\cos B}$，

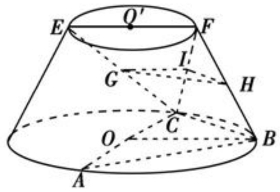
所以 $2\sin C=\sin B+\sin C$，由正弦定理，得 $a+b=2c$.

（Ⅱ）由 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}$

$$=\frac{3c^2}{2ab}-1\ldots\frac{3c^2}{2(\frac{a+b}{2})^2}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

所以 $\cos C$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

（17）【解析】(Ⅰ)设 FC 的中点为 I，连接 GI，HI，在 ΔCEF 中，因为点 G 是 CE 的中点，所以 $GI /\!/ EF$.



又 $EF /\!/ OB$，所以 $GI /\!/ OB$.

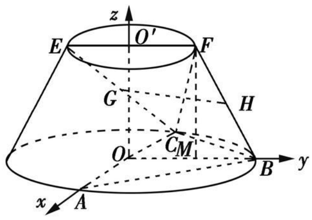
在ΔCFB 中，因为 H 是 FB 的中点，所以 $HI /\!/ BC$.

又 $HI\cap GI=I$，$OB\cap BC=B$，所以平面 $GHI /\!/$ 平面 ABC.

因为 $GH\subset$平面 GHI，

所以 $GH\parallel$平面 ABC.

(Ⅱ)解法一　连接 OO'，则 $OO'\perp$平面 ABC.



又 $AB=BC$，且 AC 是圆 O 的直径，所以 $BO\perp AC$.

以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz.

由题意得 $B(0，2\sqrt{3}，0)$，$C(-2\sqrt{3}，0，0)$.

过点 F 作 FM 垂直 OB 于点 M，

所以 $FM=\sqrt{FB^2-BM^2}=3$，

可得 $F(0，\sqrt{3}，3)$.

故$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3}，-2\sqrt{3}，0)$，$\overrightarrow{BF}=(0，-\sqrt{3}，3)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$是平面 BCF 的法向量，

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$

可得$\begin{cases}-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=0,\\ -\sqrt{3}y+3z=0.\end{cases}$

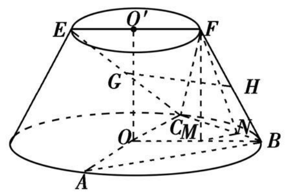
可得平面 BCF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(-1，1，\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

因为平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0，0，1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以二面角 F-BC-A 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

解法二　连接 OO'．过点 F 作 FM 垂直 OB 于点 M，



则有 $FM/\!/OO'$．又 $OO'\perp$平面 ABC，所以 $FM\perp$平面 ABC.

可得 $FM=\sqrt{FB^2-BM^2}=3$.

过点 M 作 MN 垂直 BC 于点 N，连接 FN.

可得 $FN\perp BC$，从而$\angle FNM$ 为二面角 F-BC-A 的平面角.

又 $AB=BC$，AC 是圆 O 的直径，所以 $MN=BM\sin 45°=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

从而 $FN=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$，可得 $\cos\angle FNM=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以二面角 F-BC-A 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

（18）【解析】(Ⅰ)由题意知当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=11$，所以 $a_n=6n+5$.

设数列$\{b_n\}$的公差为 d，由$\begin{cases}a_1=b_1+b_2,\\a_2=b_2+b_3,\end{cases}$得$\begin{cases}11=2b_1+d,\\17=2b_1+3d,\end{cases}$

可解得 $b_1=4$，$d=3$．所以 $b_n=3n+1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $C_n=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)\cdot 2^{n+1}$.

又 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，

所以 $T_n=3\times[2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^{n+1}]$，

$2T_n=3\times[2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n+1)\times2^{n+2}]$，

两式作差，得

$$-T_n=3\times[2\times2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\times2^{n+2}]=3\times[4+\frac{4(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\times2^{n+2}]=-3n\cdot2^{n+2},$$

所以$T_n=3n\cdot 2^{n+2}$.

(19)【解析】(Ⅰ)记事件A：“甲第一轮猜对”，记事件B：“乙第一轮猜对”，

记事件C：“甲第二轮猜对”，记事件D：“乙第二轮猜对”，

记事件E：“‘星队’至少猜对 3 个成语”.

由题意，$E=ABCD+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$.

由事件的独立性与互斥性，得

$P(E)=P(ABCD)+P(\overline{A}BCD)+P(A\overline{B}CD)+P(AB\overline{C}D)+P(ABC\overline{D})$

$=P(A)P(B)P(C)P(D)+P(\overline{A})P(B)P(C)P(D)+P(A)P(\overline{B})P(C)P(D)+P(A)P(B)P(\overline{C})P(D)+P(A)$

$P(B)P(C)P(\overline{D})=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+2\times(\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$.

所以“星队”至少猜对 3 个成语的概率为$\frac{2}{3}$.

(Ⅱ)由题意，随机变量X可能的取值为 0，1，2，3，4，6.

由事件的独立性与互斥性，得

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{144}$,

$P(X=1)=2\times(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3})=\frac{10}{144}=\frac{5}{72}$,

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{25}{144}$,

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{144}=\frac{1}{12}$,

$P(X=4)=2\times(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3})=\frac{60}{144}=\frac{5}{12}$,

$P(X=6)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$.

可得随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以数学期望$EX=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{5}{72}+2\times\frac{25}{144}+3\times\frac{1}{12}+4\times\frac{5}{12}+6\times\frac{1}{4}=\frac{23}{6}$.

(20)【解析】(Ⅰ) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$；

$$f'(x)=a-\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{(ax^2-2)(x-1)}{x^3}.$$

当$a \leqslant 0$， $x \in (0,1)$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增；

$x \in (1,+\infty)$时，$f'(x) < 0$ $f(x)$单调递减.

当$a > 0$时，$f'(x) = \dfrac{a(x-1)}{x^3}(x+\sqrt{\dfrac{2}{a}})(x-\sqrt{\dfrac{2}{a}})$.

（1）$0 < a < 2$，$\sqrt{\dfrac{2}{a}} > 1$，

当$x \in (0,1)$或$x \in (\sqrt{\dfrac{2}{a}},+\infty)$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增；

当$x \in (1,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$时，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调递减；

（2）$a = 2$时，$\sqrt{\dfrac{2}{a}} = 1$，在$x \in (0,+\infty)$内，$f'(x) \geqslant 0$，$f(x)$单调递增；

（3）$a > 2$时，$0 < \sqrt{\dfrac{2}{a}} < 1$，

当$x \in (0,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$或$x \in (1,+\infty)$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增；

当$x \in (\sqrt{\dfrac{2}{a}},1)$时，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调递减.

综上所述，

当$a \leq 0$时，函数$f(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,+\infty)$内单调递减；

当$0 < a < 2$时，$f(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$内单调递减，在$(\sqrt{\dfrac{2}{a}},+\infty)$ 内单调递增；

当$a = 2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增；

当$a > 2$，$f(x)$在$(0,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$内单调递增，在$(\sqrt{\dfrac{2}{a}},1)$内单调递减，在$(1,+\infty)$内单调递增.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a = 1$时，

$$f(x) - f'(x) = x - \ln x + \frac{2x-1}{x^2} - (1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3})$$

$=x-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$，$x\in[1,2]$，

令 $g(x)=x-\ln x, h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$，$x\in[1,2]$.

则 $f(x)-f'(x)=g(x)+h(x)$，

由 $g'(x)=\frac{x-1}{x}\geqslant 0$ 可得 $g(x)\geqslant g(1)=1$，当且仅当 $x=1$ 时取得等号.

又 $h'(x)=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4}$，

设 $\varphi(x)=-3x^2-2x+6$，则 $\varphi(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 单调递减，

因为 $\varphi(1)=1,\varphi(2)=-10$，

所以在 $\exists x_0\in[1,2]$ 上使得 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0, x\in(x_0,2)$ 时，$\varphi(x)<0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增；在 $(x_0,2)$ 上单调递减，

由于 $h(1)=1,h(2)=\frac{1}{2}$，因此 $h(x)\geq h(2)=\frac{1}{2}$，当且仅当 $x=2$ 取得等号，

所以 $f(x)-f'(x)>g(1)+h(2)=\frac{3}{2}$，

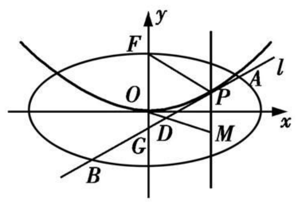
即 $f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$ 对于任意的 $x\in[1,2]$ 成立。

(21)【解析】（Ⅰ）由题意知 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得：$a=2b$.

因为抛物线 E 的焦点为 $F(0,\frac{1}{2})$，所以 $a=1,b=\frac{1}{2}$，

所以椭圆 C 的方程为 $x^2+4y^2=1$.

（Ⅱ）(i) 设 $P(m,\frac{m^2}{2})(m>0)$，



由 $x^2=2y$ 可得 $y'=x$，所以直线 l 的斜率为 m，

因此直线 l 的方程为 $y-\frac{m^2}{2}=m(x-m)$，即 $y=mx-\frac{m^2}{2}$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_0,y_0)$，联立方程 $\begin{cases} y=mx-\frac{m^2}{2} \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}$

得 $(4m^2+1)x^2-4m^3x+m^4-1=0$，

由 $\Delta>0$，得 $0<m<\sqrt{2+\sqrt{5}}$ $\left(\text{或} 0<m^2<2+\sqrt{5}\right)$

且 $x_1+x_2=\frac{4m^3}{4m^2+1}$，

因此 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2m^3}{4m^2+1}$，

将其代入 $y=mx-\frac{m^2}{2}$ 得 $y_0=-\frac{m^2}{2(4m^2+1)}$，

因为 $\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{4m}$，所以直线 OD 方程为 $y=-\frac{1}{4m}x$.

联立方程 $\begin{cases} y=-\frac{1}{4m}x \\ x=m \end{cases}$，得点 M 的纵坐标为 $y_{\mathrm{M}}=-\frac{1}{4}$，

即点 M 在定直线 $y=-\frac{1}{4}$ 上.

（ii）由（i）知直线 l 方程为 $y=mx-\frac{m^2}{2}$，

令 $x=0$ 得 $y=-\frac{m^2}{2}$，所以 $G(0,-\frac{m^2}{2})$，

又 $P(m,\frac{m^2}{2}),F(0,\frac{1}{2}),D\ (\frac{2m^3}{4m^2+1},\frac{-m^2}{2(4m^2+1)})$，

所以 $S_1=\frac{1}{2}|GF|m=\frac{1}{4}m(m^2+1)$，

$S_2=\frac{1}{2}|PM|\cdot|m-x_0|=\frac{m(2m^2+1)^2}{8(4m^2+1)}$，

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2(4m^2+1)(m^2+1)}{(2m^2+1)^2}$，

令$t=2m^2+1$，则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(2t-1)(t+1)}{t^2}=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+2$，

当$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$，即$t=2$时，$\frac{S_1}{S_2}$取得最大值$\frac{9}{4}$，此时$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，满足$\Delta>0$，

所以点P的坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$，因此$\frac{S_1}{S_2}$的最大值为$\frac{9}{4}$，此时点$P$的坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$.