2016 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标III）

参考答案与试题解析

一、选择题:本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）（2016•新课标III）设集合 $S=\{x|(x-2)(x-3)\geqslant 0\}$，$T=\{x|x>0\}$，则 $S\cap T=$（　　）

A．[2，3]　　　　B．（﹣∞，2]∪[3，+∞）

C．[3，+∞）　　　　D．（0，2]∪[3，+∞）

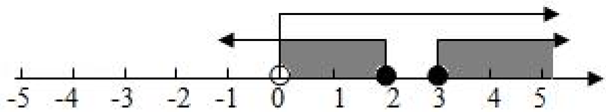
【分析】求出 S 中不等式的解集确定出 S，找出 S 与 T 的交集即可．

【解答】解：由 S 中不等式解得：$x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$，即 $S=(-\infty, 2]\cup[3, +\infty)$，

∵$T=(0, +\infty)$，

∴$S\cap T=(0, 2]\cup[3, +\infty)$，

故选：D．



【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5 分）（2016•新课标III）若 $z=1+2i$，则 $\frac{4i}{z\cdot\overline{z}-1}=$（　　）

A．1　　　　B．﹣1　　　　C．i　　　　D．﹣i

【分析】利用复数的乘法运算法则，化简求解即可．

【解答】解：$z=1+2i$，则 $\frac{4i}{z\overline{z}-1}=\frac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=\frac{4i}{5-1}=i$．

故选：C．

【点评】本题考查复数的代数形式混合运算，考查计算能力．

3．（5 分）（2016•新课标III）已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$，则 $\angle ABC=$（　　）

A．30°　　　　B．45°　　　　C．60°　　　　D．120°

【分析】根据向量 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 的坐标便可求出 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，及 $|\overrightarrow{BA}|$，$|\overrightarrow{BC}|$ 的值，从而根据向量夹角余弦公式即可求出 $\cos\angle ABC$ 的值，根据 $\angle ABC$ 的范围便可得出 $\angle ABC$ 的值．

【解答】解：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|=1$；

$\therefore\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

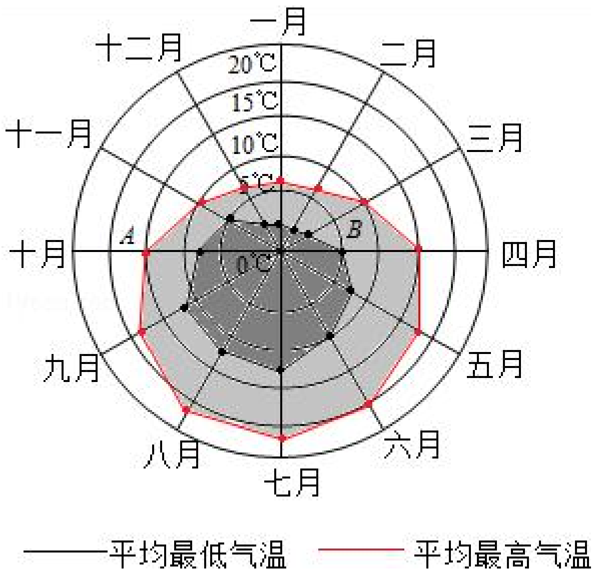
又 $0°\leqslant\angle ABC\leqslant180°$；

$\therefore\angle ABC=30°$．

故选：A．

【点评】考查向量数量积的坐标运算，根据向量坐标求向量长度的方法，以及向量夹角的余弦公式，向量夹角的范围，已知三角函数值求角．

4．（5 分）（2016•新课标III）某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图，图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15℃，B 点表示四月的平均最低气温约为 5℃，下面叙述不正确的是（　　）



A．各月的平均最低气温都在 0℃以上

B．七月的平均温差比一月的平均温差大

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同

D．平均最高气温高于 20℃的月份有 5 个

【分析】根据平均最高气温和平均最低气温的雷达图进行推理判断即可．

【解答】解：A．由雷达图知各月的平均最低气温都在 0℃以上，正确

B．七月的平均温差大约在 10° 左右，一月的平均温差在 5° 左右，故七月的平均温差比一月的平均温差大，正确

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同，都为 10°，正确

D．平均最高气温高于 20℃的月份有 7，8 两个月，故 D 错误，

故选：D．

【点评】本题主要考查推理和证明的应用，根据平均最高气温和平均最低气温的雷达图，利用图象法进行判断是解决本题的关键．

5．（5 分）（2016•新课标III）若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=$（　　）

A．$\frac{64}{25}$　　B．$\frac{48}{25}$　　C．1　　D．$\frac{16}{25}$

【分析】将所求的关系式的分母“1”化为（$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$），再将“弦”化“切”即可得到答案．

【解答】解：$\because\tan\alpha=\frac{3}{4}$，

$\therefore\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1+4\times\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}+1}=\frac{64}{25}$．

故选：A．

【点评】本题考查三角函数的化简求值，“弦”化“切”是关键，是基础题．

6．（5 分）（2016•新课标III）已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

【分析】$b=4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，结合幂函数的单调性，可比较 a，b，c，进而得到答案．

【解答】解：$\because a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，

$b=3^{\frac{2}{3}}$，

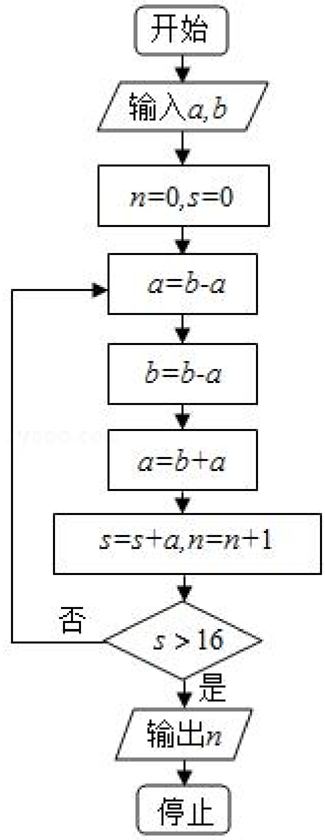
$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，

综上可得：$b<a<c$，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是指数函数的单调性，幂函数的单调性，是函数图象和性质的综合应用，难度中档．

7．（5 分）（2016•新课标III）执行如图程序框图，如果输入的 $a=4$，$b=6$，那么输出的 $n=$（　　）



A．3　　　　　　　B．4　　　　　　　C．5　　　　　　　D．6

【分析】模拟执行程序，根据赋值语句的功能依次写出每次循环得到的 a，b，s，n 的值，当 $s=20$ 时满足条件 $s>16$，退出循环，输出 n 的值为 4．

【解答】解：模拟执行程序，可得

$a=4$，$b=6$，$n=0$，$s=0$

执行循环体，$a=2$，$b=4$，$a=6$，$s=6$，$n=1$

不满足条件 $s>16$，执行循环体，$a=-2$，$b=6$，$a=4$，$s=10$，$n=2$

不满足条件 $s>16$，执行循环体，$a=2$，$b=4$，$a=6$，$s=16$，$n=3$

不满足条件 $s>16$，执行循环体，$a=-2$，$b=6$，$a=4$，$s=20$，$n=4$

满足条件 $s>16$，退出循环，输出 n 的值为 4．

故选：B．

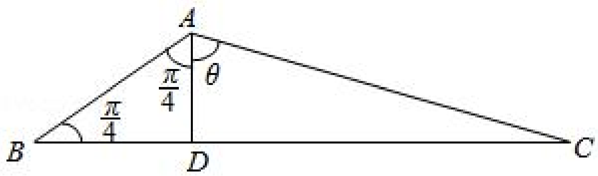
【点评】本题主要考查了循环结构的程序框图的应用，正确依次写出每次循环得到的 a，b，s 的值是解题的关键，属于基础题．

8．（5 分）（2016•新课标III）在△ABC 中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A$ 等于（　　）

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【分析】作出图形，令∠DAC＝θ，依题意，可求得 $\cos\theta=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2(\frac{2a}{3})^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，利用两角和的余弦即可求得答案．

【解答】解：设△ABC 中角 A、B、C、对应的边分别为 a、b、c，$AD\perp BC$ 于 D，令∠DAC＝θ，



∵在△ABC 中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高 $AD=h=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}a$，

∴$BD=AD=\frac{1}{3}a$，$CD=\frac{2}{3}a$，

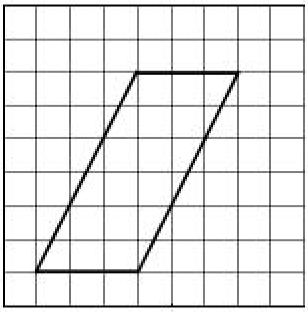
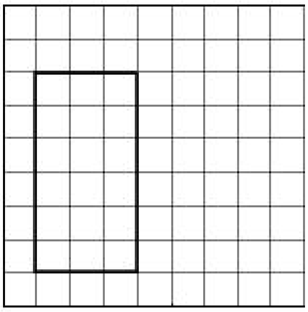
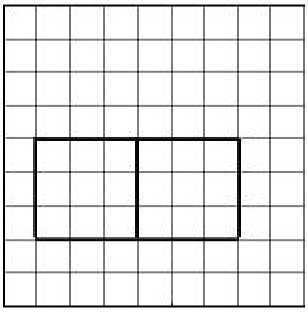
在 Rt△ADC 中，$\cos\theta=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2+(\frac{2a}{3})^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$\cos A=\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$．

故选：C．

【点评】本题考查解三角形中，作出图形，令∠DAC＝θ，利用两角和的余弦求 $\cos A$ 是关键，也是亮点，属于中档题．

9．（5 分）（2016•新课标III）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　　）

A．$18+36\sqrt{5}$　　　B．$54+18\sqrt{5}$　　　C．90　　　D．81

【分析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个斜四棱柱，进而得到答案．

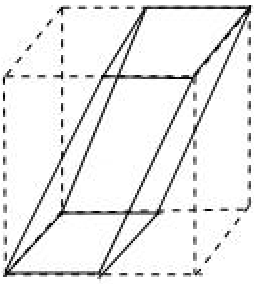
【解答】解：由已知中的三视图可得，该几何体是一个斜四棱柱，如图所示：

其上底面和下底面面积为：$3\times3\times2=18$，

侧面的面积为：$(3\times6+3\times\sqrt{3^2+6^2})\times2=18+18\sqrt{5}$，

故棱柱的表面积为：$18\times2+18+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$．

故选：B．



【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键．

10．（5分）（2016•新课标III）在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是（　　）

A．4π　　　B．$\frac{9\pi}{2}$　　　C．6π　　　D．$\frac{32\pi}{3}$

【分析】根据已知可得直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球半径为 $\frac{3}{2}$，代入球的体积公式，

可得答案．

【解答】解：∵$AB \perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，

∴$AC=10$．

故三角形 ABC 的内切圆半径 $r=\frac{6+8-10}{2}=2$，

又由 $AA_1=3$，

故直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球半径为$\frac{3}{2}$，

此时 V 的最大值$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是棱柱的几何特征，根据已知求出球的半径，是解答的关键．

11．（5 分）（2016•新课标Ⅲ）已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点，$A$，$B$ 分别为 C 的左，右顶点．P 为 C 上一点，且 $PF \perp x$ 轴，过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E．若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【分析】由题意可得 F，A，B 的坐标，设出直线 AE 的方程为 $y=k(x+a)$，分别令 $x=-c$，$x=0$，可得 M，E 的坐标，再由中点坐标公式可得 H 的坐标，运用三点共线的条件：斜率相等，结合离心率公式，即可得到所求值．

【解答】解：由题意可设 $F(-c,0)$，$A(-a,0)$，$B(a,0)$，

设直线 AE 的方程为 $y=k(x+a)$，

令 $x=-c$，可得 $M(-c,k(a-c))$，令 $x=0$，可得 $E(0,ka)$，

设 OE 的中点为 H，可得 $H\left(0,\frac{ka}{2}\right)$，

由 B，H，M 三点共线，可得 $k_{BH}=k_{BM}$，

即为$\frac{\frac{ka}{2}}{-a}=\frac{k(a-c)}{-c-a}$，

化简可得$\frac{a-c}{a+c}=\frac{1}{2}$，即为 $a=3c$，

可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$．

另解：由$\triangle AMF \backsim \triangle AEO$，

可得$\frac{a-c}{a}=\frac{MF}{OE}$，

由$\triangle BOH \backsim \triangle BFM$，

可得$\frac{a}{a+c}=\frac{OH}{FM}=\frac{OE}{2FM}$，

即有$\frac{2(a-c)}{a}=\frac{a+c}{a}$即 $a=3c$，

可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$．

故选：A．

【点评】本题考查椭圆的离心率的求法，注意运用椭圆的方程和性质，以及直线方程的运用和三点共线的条件：斜率相等，考查化简整理的运算能力，属于中档题．

12．（5 分）（2016•新课标III）定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$如下：$\{a_n\}$共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 $k\leqslant 2m$，a_1，a_2，…，a_k 中 0 的个数不少于 1 的个数，若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有（　　）

A．18 个　　B．16 个　　C．14 个　　D．12 个

【分析】由新定义可得，“规范 01 数列”有偶数项 $2m$ 项，且所含 0 与 1 的个数相等，首项为 0，末项为 1，当 $m=4$ 时，数列中有四个 0 和四个 1，然后一一列举得答案．

【解答】解：由题意可知，“规范 01 数列”有偶数项 $2m$ 项，且所含 0 与 1 的个数相等，首项为 0，末项为 1，若 $m=4$，说明数列有 8 项，满足条件的数列有：

0，0，0，0，1，1，1，1；　0，0，0，1，0，1，1，1；　0，0，0，1，1，0，1，1；

0，0，0，1，1，1，0，1；　0，0，1，0，0，1，1，1；

0，0，1，0，1，0，1，1；　0，0，1，0，1，1，0，1；　0，0，1，1，0，1，0，1；

0，0，1，1，0，0，1，1；　0，1，0，0，0，1，1，1；

0，1，0，0，1，0，1，1；　0，1，0，0，1，1，0，1；　0，1，0，1，0，0，1，1；

0，1，0，1，0，1，0，1．共 14 个．

故选：C．

【点评】本题是新定义题，考查数列的应用，关键是对题意的理解，枚举时做到不重不漏，是压轴题．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．（5 分）（2016•新课标III）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x-2y\leqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为

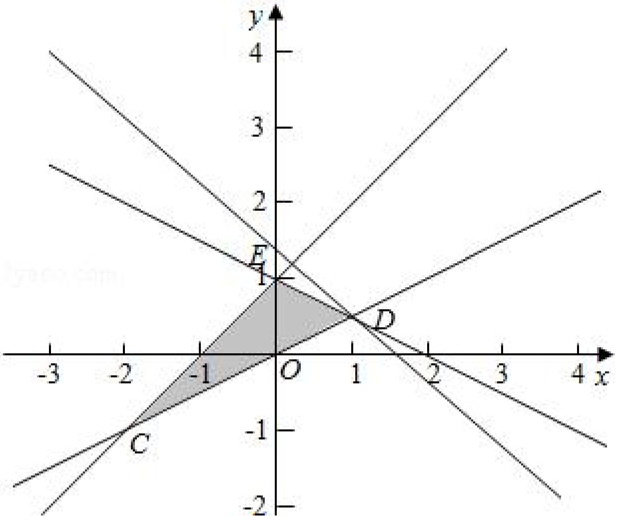
$\frac{3}{2}$.

【分析】首先画出平面区域，然后将目标函数变形为直线的斜截式，求在 y 轴的截距最大值．

【解答】解：不等式组表示的平面区域如图阴影部分，当直线经过 D 点时，z 最大，

由$\begin{cases}x-2y=0\\x+2y-2=0\end{cases}$得 D（1，$\frac{1}{2}$），

所以 $z=x+y$ 的最大值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；



故答案为：$\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了简单线性规划；一般步骤是：①画出平面区域；②分析目标函数，确定求最值的条件．

14．（5 分）（2016•新课标III）函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移$\underline{\quad\frac{2\pi}{3}\quad}$个单位长度得到．

【分析】令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，则 $f(x-\varphi)=2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\varphi)$，依题意可得 $2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\varphi)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，由 $\frac{\pi}{3}-\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$），可得答案．

【解答】解：$\because y=f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

$\therefore f(x-\varphi)=2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\varphi)$（$\varphi>0$），

令 $2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\varphi)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

则 $\frac{\pi}{3}-\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$），

即$\varphi=\frac{2\pi}{3}-2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

当$k=0$时，正数$\varphi_{min}=\frac{2\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$.

【点评】本题考查函数$y=\sin x$的图象变换得到$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图象，得到$\frac{\pi}{3}-\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）是关键，也是难点，属于中档题.

15.（5分）（2016•新课标III）已知$f(x)$为偶函数，当$x<0$时，$f(x)=ln(-x)+3x$，则曲线$y=f(x)$在点（1，-3）处的切线方程是___$2x+y+1=0$___.

【分析】由偶函数的定义，可得$f(-x)=f(x)$，即有$x>0$时，$f(x)=lnx-3x$，求出导数，求得切线的斜率，由点斜式方程可得切线的方程.

【解答】解：$f(x)$为偶函数，可得$f(-x)=f(x)$，

当$x<0$时，$f(x)=ln(-x)+3x$，即有

$x>0$时，$f(x)=lnx-3x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-3$，

可得$f(1)=ln1-3=-3$，$f'(1)=1-3=-2$，

则曲线$y=f(x)$在点（1，-3）处的切线方程为$y-(-3)=-2(x-1)$，

即为$2x+y+1=0$.

故答案为：$2x+y+1=0$.

【点评】本题考查导数的运用：求切线的方程，同时考查函数的奇偶性的定义和运用，考查运算能力，属于中档题.

16.（5分）（2016•新课标III）已知直线l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$与圆$x^2+y^2=12$交于A，B两点，过A，B分别作l的垂线与x轴交于C，D两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则$|CD|=$___4___.

【分析】先求出m，可得直线l的倾斜角为30°，再利用三角函数求出$|CD|$即可.

【解答】解：由题意，$|AB|=2\sqrt{3}$，∴圆心到直线的距离$d=3$，

$\therefore\frac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=3$，

$\therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴直线l的倾斜角为30°，

∵过A，B分别作l的垂线与x轴交于C，D两点，

$\therefore |CD| = \dfrac{2\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 4$.

故答案为：4．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系，考查弦长的计算，考查学生的计算能力，比较基础．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（12 分）（2016•新课标III）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\neq 0$．

（1）证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

（2）若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ．

【分析】（1）根据数列通项公式与前 n 项和公式之间的关系进行递推，结合等比数列的定义进行证明求解即可．

（2）根据条件建立方程关系进行求解就可．

【解答】解：（1）$\because S_n=1+\lambda a_n$，$\lambda\neq 0$．

$\therefore a_n\neq 0$．

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\lambda a_n-1-\lambda a_{n-1}=\lambda a_n-\lambda a_{n-1}$，

即（$\lambda-1$）$a_n=\lambda a_{n-1}$，

$\because \lambda\neq 0$，$a_n\neq 0$．$\therefore \lambda-1\neq 0$．即$\lambda\neq 1$，

即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，（$n\geqslant 2$），

$\therefore \{a_n\}$是等比数列，公比 $q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，

当 $n=1$ 时，$S_1=1+\lambda a_1=a_1$，

即 $a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，

$\therefore a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$．

（2）若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，

则若 $S_5=1+\lambda\left[\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{4}\right]=\dfrac{31}{32}$，

即 $\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{5}=\dfrac{31}{32}-1=-\dfrac{1}{32}$，

则$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，得$\lambda=-1$．

【点评】本题主要考查数列递推关系的应用，根据 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$ 的关系进行递推是解决本题的关键．考查学生的运算和推理能力．

18．（12 分）（2016•新课标Ⅲ）如图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图．

注：年份代码 1 - 7 分别对应年份 2008 - 2014．

（Ⅰ）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以证明；

（Ⅱ）建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量．

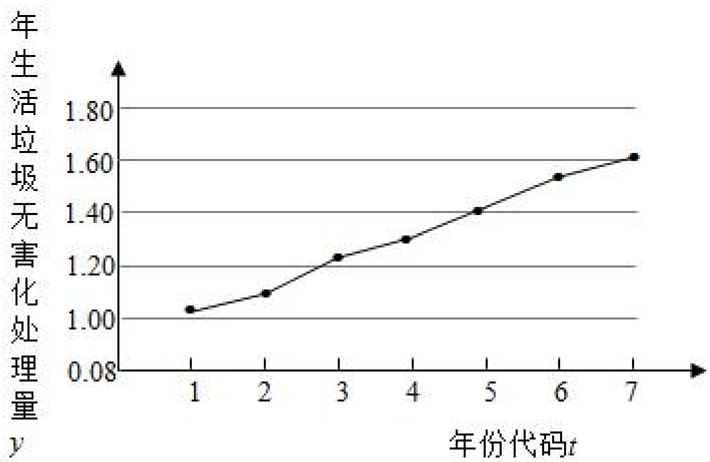
附注：

参考数据：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx 2.646$．

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$．



【分析】（1）由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，将已知数据代入相关系数方程，可得答案；

（2）根据已知中的数据，求出回归系数，可得回归方程，2016 年对应的 t 值为 9，代入

可预测2016年我国生活垃圾无害化处理量.

【解答】解：（1）由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，理由如下：

$$\because\ r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\overline{t}\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}\approx$$

$$\frac{40.17-4\times9.32}{2\sqrt{7}\cdot0.55}\approx\frac{2.89}{2.9106}\approx0.993,$$

$\because 0.993>0.75$，

故 y 与 t 之间存在较强的正相关关系；

（2）$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\overline{t}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\overline{t}^2}\approx\frac{2.89}{28}\approx0.103,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}\approx1.331-0.103\times4\approx0.92$，

$\therefore y$ 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=0.10t+0.92$，

2016年对应的 t 值为9，

故 $\hat{y}=0.10\times9+0.92=1.82$，

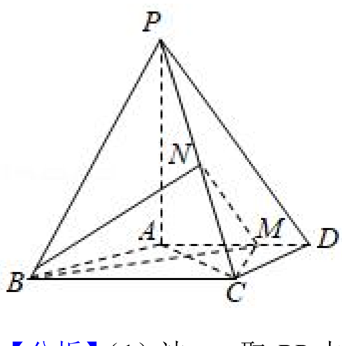
预测2016年我国生活垃圾无害化处理量为1.82亿吨.

【点评】本题考查的知识点是线性回归方程，回归分析，计算量比较大，计算时要细心.

19.（12分）（2016•新课标III）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点.

（1）证明：$MN\parallel$平面 PAB；

（2）求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



【分析】（1）法一、取 PB 中点 G，连接 AG，NG，由三角形的中位线定理可得 $NG\parallel BC$，

且 $NG=\frac{1}{2}BC$，再由已知得 $AM\parallel BC$，且 $AM=\frac{1}{2}BC$，得到 $NG\parallel AM$，且 $NG=AM$，说明四边形 $AMNG$ 为平行四边形，可得 $NM\parallel AG$，由线面平行的判定得到 $MN\parallel$ 平面 PAB；

法二、证明 $MN\parallel$ 平面 PAB，转化为证明平面 $NEM\parallel$ 平面 PAB，在△PAC 中，过 N 作 $NE\perp AC$，垂足为 E，连接 ME，由已知 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可得 $PA\parallel NE$，通过求解直角三角形得到 $ME\parallel AB$，由面面平行的判定可得平面 $NEM\parallel$ 平面 PAB，则结论得证；

（2）连接 CM，证得 $CM\perp AD$，进一步得到平面 $PNM\perp$ 平面 PAD，在平面 PAD 内，过 A 作 $AF\perp PM$，交 PM 于 F，连接 NF，则∠ANF 为直线 AN 与平面 PMN 所成角．然后求解直角三角形可得直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值．

【解答】（1）证明：法一、如图，取 PB 中点 G，连接 AG，NG，

∵N 为 PC 的中点，

∴$NG\parallel BC$，且 $NG=\frac{1}{2}BC$，

又 $AM=\frac{2}{3}AD=2$，$BC=4$，且 $AD\parallel BC$，

∴$AM\parallel BC$，且 $AM=\frac{1}{2}BC$，

则 $NG\parallel AM$，且 $NG=AM$，

∴四边形 $AMNG$ 为平行四边形，则 $NM\parallel AG$，

∵$AG\subset$平面 PAB，$NM\not\subset$平面 PAB，

∴$MN\parallel$ 平面 PAB；

法二、

在△PAC 中，过 N 作 $NE\perp AC$，垂足为 E，连接 ME，

在△ABC 中，由已知 $AB=AC=3$，$BC=4$，得 $\cos\angle ACB=\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}=\frac{2}{3}$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\cos\angle EAM=\frac{2}{3}$，则 $\sin\angle EAM=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

在△EAM 中，

∵$AM=\frac{2}{3}AD=2$，$AE=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$，

由余弦定理得：$EM=\sqrt{AE^2+AM^2-2AE\cdot AM\cdot\cos\angle EAM}=\sqrt{\frac{9}{4}+4-2\times\frac{3}{2}\times2\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos\angle AEM=\dfrac{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2-4}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{9}$,

而在△*ABC* 中，$\cos\angle BAC=\dfrac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$,

$\therefore \cos\angle AEM=\cos\angle BAC$，即$\angle AEM=\angle BAC$，

$\therefore AB /\!/ EM$，则 $EM /\!/$ 平面 PAB.

由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，得 $PA\perp AC$，又 $NE\perp AC$，

$\therefore NE /\!/ PA$，则 $NE /\!/$ 平面 PAB.

$\because NE\cap EM=E$，

$\therefore$ 平面 $NEM /\!/$ 平面 PAB，则 $MN /\!/$ 平面 PAB；

（2）解：在△*AMC* 中，由 $AM=2$，$AC=3$，$\cos\angle MAC=\dfrac{2}{3}$，得 $CM^2=AC^2+AM^2-2AC\cdot AM\cdot\cos\angle MAC=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{2}{3}=5$.

$\therefore AM^2+MC^2=AC^2$，则 $AM\perp MC$，

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，且平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，

$\therefore CM\perp$ 平面 PAD，则平面 $PNM\perp$ 平面 PAD.

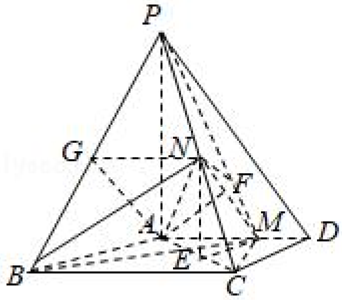
在平面 PAD 内，过 A 作 $AF\perp PM$，交 PM 于 F，连接 NF，则$\angle ANF$ 为直线 AN 与平面 PMN 所成角.

在 Rt△*PAC* 中，由 N 是 PC 的中点，得 $AN=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{1}{2}\sqrt{PA^2+PC^2}=\dfrac{5}{2}$,

在 Rt△*PAM* 中，由 $PA\cdot AM=PM\cdot AF$，得 $AF=\dfrac{PA\cdot AM}{PM}=\dfrac{4\times2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin\angle ANF=\dfrac{AF}{AN}=\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

$\therefore$ 直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为$\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.



【点评】本题考查直线与平面平行的判定，考查直线与平面所成角的求法，考查数学转化思想方法，考查了空间想象能力和计算能力，是中档题．

20．（12分）（2016•新课标III）已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点．

（Ⅰ）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR\parallel FQ$；

（Ⅱ）若△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程．

【分析】（Ⅰ）连接 RF，PF，利用等角的余角相等，证明∠PRA＝∠PQF，即可证明 $AR\parallel FQ$；

（Ⅱ）利用△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求出 N 的坐标，利用点差法求 AB 中点的轨迹方程．

【解答】（Ⅰ）证明：连接 RF，PF，

由 $AP=AF$，$BQ=BF$ 及 $AP\parallel BQ$，得∠AFP+∠BFQ＝90°，

∴∠PFQ＝90°，

∵R 是 PQ 的中点，

∴$RF=RP=RQ$，

∴△PAR≌△FAR，

∴∠PAR＝∠FAR，∠PRA＝∠FRA，

∵∠BQF+∠BFQ＝180°－∠QBF＝∠PAF＝2∠PAR，

∴∠FQB＝∠PAR，

∴∠PRA＝∠PQF，

∴$AR\parallel FQ$．

（Ⅱ）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

F（$\frac{1}{2}$，0），准线为 $x=-\frac{1}{2}$，

$S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，

设直线 AB 与 x 轴交点为 N，

∴$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|FN||y_1-y_2|$，

∵△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，

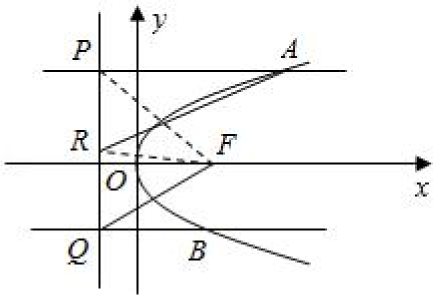
∴$2|FN|=1$，∴$x_N=1$，即 N（1，0）.

设 AB 中点为 M（x，y），由$\begin{cases}y_1^2=2x_1\\ y_2^2=2x_2\end{cases}$得$y_1^2-y_2^2=2$（$x_1-x_2$），

又$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y}{x-1}$，

∴$\frac{y}{x-1}=\frac{1}{y}$，即 $y^2=x-1$.

∴AB 中点轨迹方程为 $y^2=x-1$.



【点评】本题考查抛物线的方程与性质，考查轨迹方程，考查学生的计算能力，属于中档题.

21.（12 分）（2016•新课标III）设函数 f（x）$=a\cos 2x+$（$a-1$）（$\cos x+1$），其中 $a>0$，记$|f$（x）$|$的最大值为 A.

（Ⅰ）求 f'（x）；

（Ⅱ）求 A；

（III）证明：$|f'$（x）$|\leqslant 2A$.

【分析】（Ⅰ）根据复合函数的导数公式进行求解即可求 f'（x）；

（Ⅱ）讨论 a 的取值，利用分类讨论的思想方法，结合换元法，以及一元二次函数的最值的性质进行求解；

（III）由（I），结合绝对值不等式的性质即可证明：$|f'$（x）$|\leqslant 2A$.

【解答】（I）解：f'（x）$=-2a\sin 2x-$（$a-1$）$\sin x$.

（II）当 $a\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)|\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)|(\cos x+1)|$

$\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)(|\cos x|+1)|\leqslant a+2(a-1)=3a-2=f(0)$，因此 $A=3a-2$.

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$，

令 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，

则 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值，$g(-1)=a$，$g(1)=3a-2$，

且当 $t=\frac{1-a}{4a}$ 时，$g(t)$ 取得极小值，极小值为 $g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$，

（二次函数在对称轴处取得极值）

令 $-1<\frac{1-a}{4a}<1$，得 $a<-\frac{1}{3}$（舍）或 $a>\frac{1}{5}$.

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$g(t)$ 在 $(-1,1)$ 内无极值点，$|g(-1)|=a$，$|g(1)|=2-3a$，$|g(-1)|<|g(1)|$，

$\therefore A=2-3a$，

②当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，由 $g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$，得 $g(-1)>g(1)>g(\frac{1-a}{4a})$，

又 $|g(\frac{1-a}{4a})|-|g(-1)|=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$，

$\therefore A=|g(\frac{1-a}{4a})|=\frac{a^2+6a+1}{8a}$，

综上，$A=\begin{cases}2-3a, & 0<a\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a}, & \frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2, & a\geqslant 1\end{cases}$.

（III）证明：由（I）可得：$|f'(x)|=|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x|\leqslant 2a+|a-1|$，

当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$|f'(x)|<1+a\leqslant 2-4a<2(2-3a)=2A$，

当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，$A=\frac{a^2+6a+1}{8a}=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}>1$，

$\therefore |f'(x)|\leqslant 1+a\leqslant 2A$，

当 $a\geqslant 1$ 时，$|f'(x)|\leqslant 3a-1\leqslant 6a-4=2A$，

综上：$|f'(x)|\leqslant 2A$.

【点评】本题主要考查函数的导数以及函数最值的应用，求函数的导数，以及换元法，转化法转化为一元二次函数是解决本题的关键．综合性较强，难度较大．

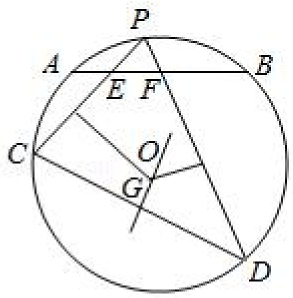
请考生在第 22-24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-1：几何

证明选讲]

22．（10分）（2016•新课标III）如图，⊙O中$\overset{\frown}{AB}$的中点为P，弦PC，PD分别交AB于E，F两点．

（1）若$\angle PFB=2\angle PCD$，求$\angle PCD$的大小；

（2）若EC的垂直平分线与FD的垂直平分线交于点G，证明：$OG\perp CD$．



【分析】（1）连接PA，PB，BC，设$\angle PEB=\angle 1$，$\angle PCB=\angle 2$，$\angle ABC=\angle 3$，$\angle PBA=\angle 4$，$\angle PAB=\angle 5$，运用圆的性质和四点共圆的判断，可得E，C，D，F共圆，再由圆内接四边形的性质，即可得到所求$\angle PCD$的度数；

（2）运用圆的定义和E，C，D，F共圆，可得G为圆心，G在CD的中垂线上，即可得证．

【解答】（1）解：连接PB，BC，

设$\angle PEB=\angle 1$，$\angle PCB=\angle 2$，$\angle ABC=\angle 3$，

$\angle PBA=\angle 4$，$\angle PAB=\angle 5$，

由⊙O中$\overset{\frown}{AB}$的中点为P，可得$\angle 4=\angle 5$，

在$\triangle EBC$中，$\angle 1=\angle 2+\angle 3$，

又$\angle D=\angle 3+\angle 4$，$\angle 2=\angle 5$，

即有$\angle 2=\angle 4$，则$\angle D=\angle 1$，

则四点E，C，D，F共圆，

可得$\angle EFD+\angle PCD=180°$，

由$\angle PFB=\angle EFD=2\angle PCD$，

即有$3\angle PCD=180°$，

可得$\angle PCD=60°$；

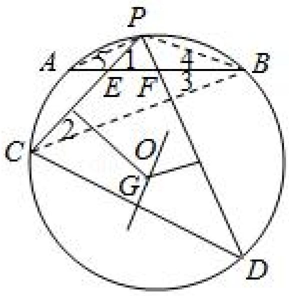
（2）证明：由C，D，E，F共圆，

由EC的垂直平分线与FD的垂直平分线交于点G

可得 G 为圆心，即有 $GC=GD$，

则 G 在 CD 的中垂线，又 CD 为圆 G 的弦，

则 $OG\perp CD$.



【点评】本题考查圆内接四边形的性质和四点共圆的判断，以及圆的垂径定理的运用，考查推理能力，属于中档题.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

23.（2016•新课标III）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（α为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（1）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求$|PQ|$的最小值及此时 P 的直角坐标.

【分析】（1）运用两边平方和同角的平方关系，即可得到 C_1 的普通方程，运用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，以及两角和的正弦公式，化简可得 C_2 的直角坐标方程；

（2）由题意可得当直线 $x+y-4=0$ 的平行线与椭圆相切时，$|PQ|$取得最值．设与直线 $x+y-4=0$ 平行的直线方程为 $x+y+t=0$，代入椭圆方程，运用判别式为 0，求得 t，再由平行线的距离公式，可得$|PQ|$的最小值，解方程可得 P 的直角坐标.

另外：设 P（$\sqrt{3}\cos\alpha$，$\sin\alpha$），由点到直线的距离公式，结合辅助角公式和正弦函数的值域，即可得到所求最小值和 P 的坐标.

【解答】解：（1）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（α为参数），

移项后两边平方可得 $\frac{x^2}{3}+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，

即有椭圆 C_1：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$，

即有$\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=2\sqrt{2}$,

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，可得 $x+y-4=0$，

即有 C_2 的直角坐标方程为直线 $x+y-4=0$；

（2）由题意可得当直线 $x+y-4=0$ 的平行线与椭圆相切时，

$|PQ|$取得最值.

设与直线 $x+y-4=0$ 平行的直线方程为 $x+y+t=0$，

联立$\begin{cases}x+y+t=0\\ x^2+3y^2=3\end{cases}$可得 $4x^2+6tx+3t^2-3=0$，

由直线与椭圆相切，可得$\triangle=36t^2-16(3t^2-3)=0$，

解得 $t=\pm2$，

显然 $t=-2$ 时，$|PQ|$取得最小值，

即有$|PQ|=\frac{|-4-(-2)|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$,

此时 $4x^2-12x+9=0$，解得 $x=\frac{3}{2}$,

即为 $P\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

另解：设 $P(\sqrt{3}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

由 P 到直线的距离为 $d=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{|2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-4|}{\sqrt{2}}$,

当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，$|PQ|$的最小值为$\sqrt{2}$,

此时可取$\alpha=\frac{\pi}{6}$，即有 $P\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

【点评】本题考查参数方程和普通方程的互化、极坐标和直角坐标的互化，同时考查直线与椭圆的位置关系，主要是相切，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

[选修 4-5：不等式选讲]

24.（2016•新课标III）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant6$ 的解集；

（2）设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant3$，求 a 的取值范围.

【分析】（1）当 $a=2$ 时，由已知得$|2x-2|+2\leqslant6$，由此能求出不等式 $f(x)\leqslant6$ 的解集.

（2）由 $f(x)+g(x)=|2x-1|+|2x-a|+a\geq 3$，得 $|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{3-a}{2}$，由此能求出 a 的取值范围．

【解答】解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=|2x-2|+2$，

∵$f(x)\leq 6$，∴$|2x-2|+2\leq 6$，

$|2x-2|\leq 4$，$|x-1|\leq 2$，

∴ $-2\leq x-1\leq 2$，

解得 $-1\leq x\leq 3$，

∴不等式 $f(x)\leq 6$ 的解集为 $\{x|-1\leq x\leq 3\}$．

（2）∵$g(x)=|2x-1|$，

∴$f(x)+g(x)=|2x-1|+|2x-a|+a\geq 3$，

$2|x-\frac{1}{2}|+2|x-\frac{a}{2}|+a\geq 3$，

$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{3-a}{2}$，

当 $a\geq 3$ 时，成立，

当 $a<3$ 时，$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{1}{2}|a-1|\geq\frac{3-a}{2}>0$，

∴ $(a-1)^2\geq(3-a)^2$，

解得 $2\leq a<3$，

∴a 的取值范围是 $[2,+\infty)$．

【点评】本题考查含绝对值不等式的解法，考查实数的取值范围的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意不等式性质的合理运用．