2016 年普通高等学校招生全国统一考试(全国 III 卷)

文科数学(参考答案)

1．C

【解析】试题分析：由补集的概念，得ð$_A B=\{0,2,6,10\}$，故选 C.

2．D

【详解】由题意可得 ：$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，且：$\bar{z}=4-3i$，

据此有：$\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$.本题选择 D 选项.

3．A

【解析】试题分析：由题意，得$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\angle ABC=30°$，故选 A.

4．D

【详解】试题分析：由图可知各月的平均最低气温都在 0℃以上，A 正确；由图可知在七月的平均温差大于$7.5°C$，而一月的平均温差小于$7.5°C$，所以七月的平均温差比一月的平均温差大，B 正确；由图可知三月和十一月的平均最高气温都大约在$10°C$，基本相同，C 正确；由图可知平均最高气温高于 20℃的月份有 7，8 两个月，所以不正确．故选 D.

5．C

【解析】试题分析：开机密码的可能有$(M,1),(M,2),(M,3),(M,4),(M,5),(I,1),(I,2),(I,3),(I,4),(I,5)$，$(N,1),(N,2),(N,3),(N,4),(N,5)$，共 15 种可能，所以小敏输入一次密码能够成功开机的概率是$\frac{1}{15}$，故选 C.

6．D

【解析】$\cos 2\theta=\cos^2\theta-sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-sin^2\theta}{\cos^2\theta+sin^2\theta}$.

分子分母同时除以$\cos^2\theta$，即得：$\cos 2\theta=\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}$.故选 D.

7．A

【详解】因为$a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}},b=3^{\frac{2}{3}},c=5^{\frac{2}{3}}$，且幂函数$y=x^{\frac{2}{3}}$在$(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $b<a<c$.故选 A.

8．B

【解析】试题分析：模拟执行程序，可得$a=4,b=6,n=0,s=0$,执行循环体,$a=2,b=4,a=6,s=6,n=1$,不满足条件$s>16$,执行循环体,$a=-2,b=6,a=4,s=10,n=2$，不满足条件$s>16$,执行循环体,$a=2,b=4,a=6,s=16,n=3$，不满足条件$s>16$,执行循环体,$a=-2,b=6,a=4,s=20,n=4$,不满足条件$s>16$,退出循环，输出n的值为4,故选 B.

9．D

【解析】试题分析：设BC边上的高线为AD，则$BC=3AD,DC=2AD$，所以$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{5}AD$．由正弦定理，知$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，即$\frac{\sqrt{5}AD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3AD}{\sin A}$，解得$\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选 D.

10．B

【详解】解：由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的斜四棱柱，

其底面面积为：3×6=18，

前后侧面的面积为：3×6×2=36，

左右侧面的面积为：$3\times\sqrt{3^2+6^2}\times2=18\sqrt{5}$ ，

故棱柱的表面积为：$18+36+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$ ．

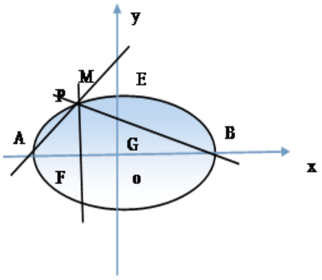
故选：B.

11．B

【解析】试题分析：设ΔABC的内切圆半径为r，则$\frac{1}{2}(6+8+10)r=\frac{1}{2}\times 6\times 8\Rightarrow r=2>\frac{3}{2}=\frac{AA_1}{2}$，故球的最大半径为$\frac{3}{2}\Rightarrow V_{\max}=\frac{4}{3}\pi(\frac{3}{2})^3=\frac{9}{2}\pi$，故选 B.

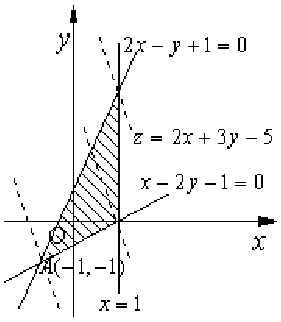
12．A

【解析】试题分析：如图取P与M重合，则由$A(-a,0),M(-c,\frac{b^2}{a})\Rightarrow$直线$AM:y=\frac{\frac{b^2}{a}}{-c+a}(x+a)\Rightarrow E(0,\frac{b^2}{a-c})$同理由$B(a,0),M(-c,\frac{b^2}{a})\Rightarrow G(0,\frac{b^2}{a+c})\Rightarrow\frac{b^2}{a-c}=\frac{2b^2}{a+c}\Rightarrow a=3c\Rightarrow e=\frac{1}{3}$,故选 A.



13．-10

【解析】试题分析：作出不等式组满足的平面区域，如图所示，由图知当目标函数$z=2x+3y-5$经过点$A(-1,-1)$时取得最小值，即$z_{\min}=2\times(-1)+3\times(-1)-5=-10$．



14．$\frac{\pi}{3}$

【解析】试题分析：因为$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，所以函数$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$的的图像可由函数$y=2\sin x$的图像至少向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到.

15．4

【解析】试题分析：由$x-\sqrt{3}y+6=0$，得$x=\sqrt{3}y-6$，代入圆的方程，整理得$y^2-3\sqrt{3}y+6=0$，解得$y_1=2\sqrt{3},y_2=\sqrt{3}$，所以$x_1=0,x_2=-3$，所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=2\sqrt{3}$．又直线$l$的倾斜角为$30°$，由平面几何知识知在梯形$ABDC$中，$|CD|=\frac{|AB|}{\cos 30°}=4$.

16．$y=2x$

【解析】试题分析：当$x>0$时，$-x<0$，则$f(-x)=e^{x-1}+x$．又因为$f(x)$为偶函数，所以$f(x)=f(-x)=e^{x-1}+x$，所以$f'(x)=e^{x-1}+1$，则$f'(1)=2$，所以切线方程为$y-2=2(x-1)$，即$y=2x$．

17．（Ⅰ）$a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{4}$；（Ⅱ）$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$．

【解析】试题解析：（Ⅰ）由题意，得$a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{4}$.

（Ⅱ）由$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$得$2a_{n+1}(a_n+1)=a_n(a_n+1)$.

因为$\{a_n\}$的各项都为正数，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

故$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，因此$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

18.（Ⅰ）答案见解析；（Ⅱ）答案见解析.

【解析】试题解析：（Ⅰ）由折线图中数据和附注中参考数据得

$\bar{t}=4$，$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$，

$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-\bar{t}\sum_{i=1}^{7}y_i=40.17-4\times 9.32=2.89$，$r\approx\frac{2.89}{0.55\times 2\times 2.646}\approx 0.99$.

因为y与t的相关系数近似为0.99，说明y与t的线性相关相当高，从而可以用线性回归模型拟合y与t的关系.

（Ⅱ）由$\bar{y}=\frac{9.32}{7}\approx 1.331$及（Ⅰ）得$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{2.89}{28}\approx 0.103$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}\approx 1.331-0.103\times 4\approx 0.92$.所以，$y$关于$t$的回归方程为：$\hat{y}=0.92+0.10t$.

将2016年对应的$t=9$代入回归方程得：$\hat{y}=0.92+0.10\times 9=1.82$.

所以预测2016年我国生活垃圾无害化处理量将约1.82亿吨.

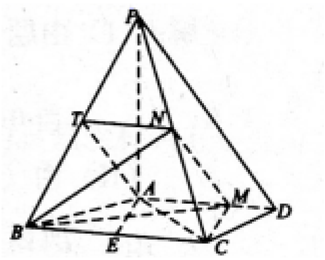
19.（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）$\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

【解析】试题解析：（Ⅰ）由已知得$AM=\frac{2}{3}AD=2$，取BP的中点T，连接AT,TN，由N为PC中点知

$TN\parallel BC$，$TN=\frac{1}{2}BC=2$.

又$AD\parallel BC$，故TN平行且等于AM，四边形$AMNT$为平行四边形，于是$MN\parallel AT$.

因为$AT\subset$平面PAB，$MN\not\subset$平面PAB，所以$MN\parallel$平面PAB.



（Ⅱ）因为$PA\perp$平面$ABCD$，N为PC的中点，所以N到平面$ABCD$的距离为$\frac{1}{2}PA$.

取 BC 的中点 E，连结 AE.由 $AB=AC=3$ 得 $AE\perp BC$， $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5}$.

由 $AM\parallel BC$ 得 M 到 BC 的距离为 $\sqrt{5}$，故 $S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

所以四面体 $N-BCM$ 的体积 $V_{N-BCM}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCM}\times\frac{PA}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

20.（Ⅰ）见解析；（Ⅱ） $y^2=x-1$.

【解析】

试题解析：由题设 $F(\frac{1}{2},0)$，设 $l_1:y=a,l_2:y=b$，则 $ab\neq 0$，且

$A(\frac{a^2}{2},0),B(\frac{b^2}{2},b),P(-\frac{1}{2},a),Q(-\frac{1}{2},b),R(-\frac{1}{2},\frac{a+b}{2})$.

记过 A,B 两点的直线为 l，则 l 的方程为 $2x-(a+b)y+ab=0$............. 3 分

（1）由于 F 在线段 AB 上，故 $1+ab=0$，

记 AR 的斜率为 k_1，FQ 的斜率为 k_2，则 $k_1=\frac{a-b}{1+a^2}=\frac{a-b}{a^2-ab}=\frac{1}{a}=\frac{-ab}{a}=-b=k_2$，

所以 $AR//FQ$.................. 5 分

（2）设 l 与 x 轴的交点为 $D(x_1,0)$，

则 $S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}|b-a||FD|=\frac{1}{2}|b-a||x_1-\frac{1}{2}|,S_{\Delta PQF}=\frac{|a-b|}{2}$，

由题设可得 $\frac{1}{2}|b-a||x_1-\frac{1}{2}|=\frac{|a-b|}{2}$，所以 $x_1=0$（舍去），$x_1=1$.

设满足条件的 AB 的中点为 $E(x,y)$.

当 AB 与 x 轴不垂直时，由 $k_{AB}=k_{DE}$ 可得 $\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}(x\neq 1)$.

而 $\frac{a+b}{2}=y$，所以 $y^2=x-1(x\neq 1)$.

当 AB 与 x 轴垂直时，E 与 D 重合，所以，所求轨迹方程为 $y^2=x-1$......... 12 分

21.（Ⅰ）当 $0<x<1$ 时，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递减；（Ⅱ）见解析；（Ⅲ）见解析.

【解析】试题解析：（Ⅰ）由题设，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $f(1)=0$.

所以当 $x\neq 1$ 时，$\ln x<x-1$.

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x<x-1$，$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$，即 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$.

（Ⅲ）由题设 $c>1$，设 $g(x)=1+(c-1)x-c^x$，则 $g'(x)=c-1-c^x\ln c$，令 $g'(x)=0$，

解得 $x_0=\frac{\ln\frac{c-1}{\ln c}}{\ln c}$.

当 $x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

由（Ⅱ）知，$1<\frac{c-1}{\ln c}<c$，故 $0<x_0<1$，又 $g(0)=g(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$1+(c-1)x>c^x$.

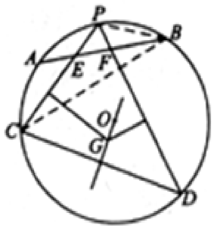
22.（Ⅰ）60°；（Ⅱ）见解析.

【解析】（Ⅰ）连结 PB,BC，则：$\angle BFD=\angle PBA+\angle BPD,\angle PCD=\angle PCB+\angle BCD$.

因为$AP = BP$,所以$\angle PBA=\angle PCB$，又$\angle BPD=\angle BCD$，所以$\angle BFD=\angle PCD$.

又$\angle PFD+\angle BFD=180^\circ$, $\angle PFB=2\angle PCD$，所以$3\angle PCD=180^\circ$，因此$\angle PCD=60^\circ$.

（Ⅱ）因为$\angle PCD=\angle BFD$，所以$\angle PCD+\angle EFD=180^\circ$，由此知$C,D,F,E$四点共圆，其圆心既在$CE$的垂直平分线上，又在$DF$的垂直平分线上，故$G$就是过$C,D,F,E$四点的圆的圆心，所以$G$在$CD$的垂直平分线上，又O 也在 CD 的垂直平分线上，因此$OG\perp CD$.



23.（1）C_1：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2：$x+y-4=0$；（2）$|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$，此时$P(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

【解析】试题解析：（1）C_1的普通方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2的直角坐标方程为$x+y-4=0$.

（2）由题意，可设点P的直角坐标为$(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha)$，因为$C_2$是直线，所以$|PQ|$的最小值即为$P$到$C_2$的距离$d(\alpha)$的最小值，$d(\alpha)=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-2|$.

当且仅当$\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$时，$d(\alpha)$取得最小值，最小值为$\sqrt{2}$，此时$P$的直角坐标为$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

24.（1）$\{x|-1\le x\le 3\}$；（2）$[2,+\infty)$.

【解析】（1）当$a=2$时，$f(x)=|2x-2|+2$.

解不等式$|2x-2|+2\le 6$，得$-1\le x\le 3$.

因此，$f(x)\le 6$的解集为$\{x|-1\le x\le 3\}$.

（2）当$x\in R$时，$f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\ \ge|2x-a+1-2x|+a\ =|1-a|+a$，

当$x=\frac{1}{2}$时等号成立，

所以当$x\in R$时，$f(x)+g(x)\ge 3$等价于$|1-a|+a\ge 3$. ①

当$a\le 1$时，①等价于$1-a+a\ge 3$，无解.

当$a>1$时，①等价于$a-1+a\ge 3$，解得$a\ge 2$.

所以a的取值范围是$[2,+\infty)$.