2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

一. 选择题：本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若集合 $M=\{x\mid(x+4)(x+1)=0\}$，$N=\{x\mid(x-4)(x-1)=0\}$，则 $M\bigcap N=$

A．$\varnothing$　　B．$\{-1,-4\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{1,4\}$

【答案】A.

【解析】因为 $M=\{x\mid(x+4)(x+1)=0\}=\{-4,-1\}$，$N=\{x\mid(x-4)(x-1)=0\}=\{1,4\}$，所以 $M\bigcap N=\varnothing$，故选 A.

【考点定位】本题考查一元二次方程、集合的基本运算，属于容易题.

2．若复数 $z=i(3-2i)$（ i 是虚数单位 ），则 $\overline{z}=$

A．$3-2i$　　B．$3+2i$　　C．$2+3i$　　D．$2-3i$

【答案】D.

【解析】因为 $z=i(3-2i)=2+3i$，所以 $\overline{z}=2-3i$，故选 D.

【考点定位】本题考查复数的基本运算，属于容易题.

3．下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是

A．$y=x+e^x$　　B．$y=x+\dfrac{1}{x}$　　C．$y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　　D．$y=\sqrt{1+x^2}$

【答案】A.

【解析】令 $f(x)=x+e^x$，则 $f(1)=1+e$，$f(-1)=-1+e^{-1}$ 即 $f(-1)\neq f(1)$，$f(-1)\neq -f(1)$，所以 $y=x+e^x$ 既不是奇函数也不是偶函数，而 BCD 依次是奇函数、偶函数、偶函数，故选 A.

【考点定位】本题考查函数的奇偶性，属于容易题.

4．袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球，其中有 10 个白球，5 个红球。从袋中任取 2 个球，所取的 2 个球中恰有 1 个白球，1 个红球的概率为

A．1　　B．$\dfrac{11}{21}$　　C．$\dfrac{10}{21}$　　D．$\dfrac{5}{21}$

【答案】B.

【解析】从袋中任取2个球共有$C_{15}^{2}=105$种，其中恰好1个白球1个红球共有$C_{10}^{1}C_{5}^{1}=50$种，所以恰好1个白球1个红球的概率为$\frac{50}{105}=\frac{10}{21}$，故选$B$.

【考点定位】本题考查排列组合、古典概率的计算，属于容易题.

5．平行于直线$2x+y+1=0$且与圆$x^2+y^2=5$相切的直线的方程是

A．$2x-y+\sqrt{5}=0$或$2x-y-\sqrt{5}=0$　　B．$2x+y+\sqrt{5}=0$或$2x+y-\sqrt{5}=0$

C．$2x-y+5=0$或$2x-y-5=0$　　D．$2x+y+5=0$或$2x+y-5=0$

【答案】D.

【解析】设所求切线方程为$2x+y+c=0$，依题有$\frac{|0+0+c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，解得$c=\pm5$，所以所求切线的直线方程为$2x+y+5=0$或$2x+y-5=0$，故选$D$.

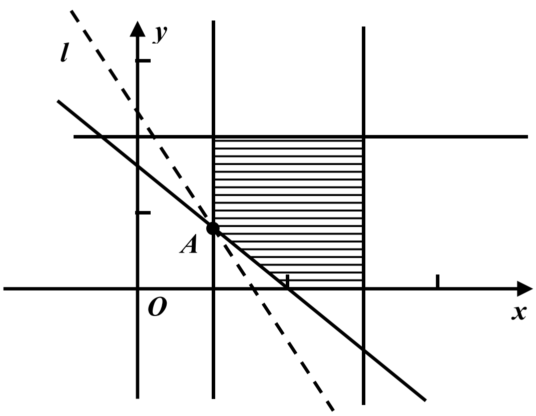
【考点定位】本题考查直线与圆的位置关系，属于容易题.

6．若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}4x+5y\geq 8\\1\leq x\leq 3\\0\leq y\leq 2\end{cases}$　则$z=3x+2y$的最小值为

A．$\frac{31}{5}$　　B. 6　　C．$\frac{23}{5}$　　D. 4

【答案】C.

【解析】不等式所表示的可行域如下图所示，



由$z=3x+2y$得$y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$，依题当目标函数直线$l$：$y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$经过$A\left(1,\frac{4}{5}\right)$时，$z$取得最小值即

$z_{\min}=3\times 1+2\times\frac{4}{5}=\frac{23}{5}$，故选 C

【考点定位】本题考查二元一次不等式的线性规划问题，属于容易题.

7．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e=\frac{5}{4}$，且其右焦点 $F_2(5,0)$，则双曲线 C 的方程为

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B．

【解析】因为所求双曲线的右焦点为 $F_2(5,0)$ 且离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$，所以 $c=5$，$a=4$，$b^2=c^2-a^2=9$

所以所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故选 B．

【考点定位】本题考查双曲线的标准方程及其简单基本性质，属于容易题.

8．若空间中 n 个不同的点两两距离都相等，则正整数 n 的取值

A．大于 5　　B. 等于 5　　C. 至多等于 4　　D. 至多等于 3

【答案】C．

【解析】正四面体的四个顶点是两两距离相等的，即空间中 n 个不同的点两两距离都相等，则正整数 n 的取值至多等于 4，下面用反证法：假设空间中有 5 个……，故选 C．

【考点定位】本题考查空间想象能力、推理能力，属于中高档题.

第 II 卷（共 110 分）

二. 填空题：本大题共 7 小题，考生作答 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.

（一）必做题（9～13 题）

9．在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中，x 的系数为__________

【答案】6．

【解析】由题可知 $T_{r+1}=C_4^r\left(\sqrt{x}\right)^{4-r}(-1)^r=C_4^r(-1)^r x^{\frac{4-r}{2}}$，令 $\frac{4-r}{2}=1$ 解得 $r=2$，所以展开式中 x 的系数为 $C_4^2(-1)^2=6$，故应填入 6．

【考点定位】本题考查二项式定理，属于容易题..

10．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$，则$a_2+a_8=$__________

【答案】10．

【解析】因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_3+a_7=a_4+a_6=a_2+a_8=2a_5$，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=25$即$a_5=5$，$a_2+a_8=2a_5=10$，故应填入$10$．

【考点定位】本题考查等差数列的性质及简单运算，属于容易题.

11．设ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则$b=$____

【答案】1．

【解析】因为$\sin B=\frac{1}{2}$且$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{5\pi}{6}$，又$C=\frac{\pi}{6}$，所以$B=\frac{\pi}{6}$，$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}$，又$a=\sqrt{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$即$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}$解得$b=1$，故应填入1.

【考点定位】本题考查正弦定理解三角形，属于容易题.

12、某高三毕业班有40人，同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言，那么全班共写了________条毕业留言.（用数字作答）

【答案】1560．

【解析】依题两两彼此给对方写一条毕业留言相当于从40人中任选两人的排列数，所以全班共写了$A_{40}^2=40\times39=1560$条毕业留言，故应填入1560．

【考点定位】本题考查排列组合问题，属于中档题.

13、已知随机变量X服从二项分布$\mathrm{B}(n,p)$，若$\mathrm{E}(\mathrm{X})=30$，$\mathrm{D}(\mathrm{X})=20$，则$p=$________.

【答案】$\frac{1}{3}$．

【解析】依题可得$E(X)=np=30$且$D(X)=np(1-p)=20$，解得$p=\frac{1}{3}$，故应填入$\frac{1}{3}$．

【考点定位】本题考查二项分布的性质，属于容易题.

(二)选做题(14～15题，考生从中选做一题)

14．(坐标系与参数方程选做题)已知直线l的极坐标方程为$2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，点$A$的极坐标为$A\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$，则点$A$到直线$l$的距离为______

【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【解析】依题已知直线l：$2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 和点 $A\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$可化为$l$：$x-y+1=0$ 和 $A(2,-2)$，

所以点 A 与直线l的距离为$d=\frac{|2-(-2)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，故应填入.

【考点定位】本题考查极坐标与平面直角坐标的互化、点与直线的距离，属于容易题.

15.（几何证明选讲选作题）如图 1，已知 AB 是圆 O 的直径，$AB=4$，EC 是圆 O 的切线，切点为 C，$BC=1$，过圆心 O 做 BC 的平行线，分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P，则 $OD=$______

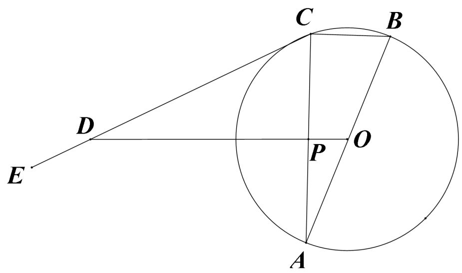
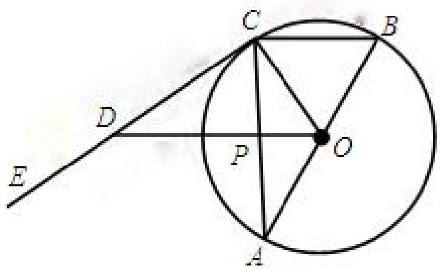


图1

【答案】8.

【解析】如下图所示，连接 OC，因为 $OD//BC$，又 $BC\perp AC$，所以 $OP\perp AC$，又 O 为 AB 线段的中点，所以 $OP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，在 $Rt\Delta OCD$ 中，$OC=\frac{1}{2}AB=2$，由直角三角形的射影定理可得

$OC^2=OP\cdot OD$ 即 $OD=\frac{OC^2}{OP}=\frac{2^2}{\frac{1}{2}}=8$，故应填入 8.



【考点定位】本题考查直线与圆、直角三角形的射影定理，属于中档题.

三. 解答题：本大题共 6 小题，满分 80 分.

16.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xoy 中，已知向量 $\vec{m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\vec{n}=(\sin x,\cos x)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。

（1）若 $\vec{m}\perp\vec{n}$，求 tan x 的值　（2）若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 x 的值。

【答案】（1）1；（2）$x=\frac{5\pi}{12}$.

【解析】（1）∵ $\vec{m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\vec{n}=(\sin x,\cos x)$ 且 $\vec{m}\perp\vec{n}$，

∴ $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(\sin x,\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

∴ $x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，

∴ $x-\frac{\pi}{4}=0$ 即 $x=\frac{\pi}{4}$，

∴ $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}=1$；

（2）由（1）依题知 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

∴ $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ 又 $x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，

∴ $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ 即 $x=\frac{5\pi}{12}$.

【考点定位】本题考查向量数量积的坐标运算、两角和差公式的逆用、知角求值、值知求角等问题，属于中档题.

17（本小题满分 12 分）

某工厂 36 名工人的年龄数据如下表。

工人编号　年龄	工人编号　年龄	工人编号　年龄	工人编号　年龄

1　40	10　36	19　27	28　34
2　44	11　31	20　43	29　39
3　40	12　38	21　41	30　43
4　41	13　39	22　37	31　38
5　33	14　43	23　34	32　42
6　40	15　45	24　42	33　53
7　45	16　39	25　37	34　37
8　42	17　38	26　44	35　49
9　43	18　36	27　42	36　39

（1）用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本，且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44，列出样本的年龄数据；

（2）计算（1）中样本的平均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2；

（3）36 名工人中年龄在 $\bar{x}-s$ 与 $\bar{x}+s$ 之间有多少人？所占的百分比是多少（精确到 0.01%）？

【答案】（1）44，40，36，43，36，37，44，43，37；（2）$\bar{x}=40$，$s^2=\dfrac{100}{9}$；（3）23，约占 63.89%．

【解析】（1）依题所抽样本编号是一个首项为 2，公差为 4 的等差数列，故其所有样本编号依次为 2，6，10，14，18，22，26，30，34，对应样本的年龄数据依次为 44，40，36，43，36，37，44，43，37；

（2）由（1）可得其样本的均值为 $\bar{x}=\dfrac{44+40+36+43+36+37+44+43+37}{9}=40$，

方差为 $s^2=\dfrac{1}{9}\left[(44-40)^2+(40-40)^2+(36-40)^2+(43-40)^2+(36-40)^2+(37-40)^2+(44-40)^2\right.$

$\left.+(43-40)^2+(37-40)^2\right]=\dfrac{1}{9}\left[4^2+0^2+(-4)^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2+4^2+3^2+(-3)^2\right]=\dfrac{100}{9}$．

（3）由（2）知 $s=\dfrac{10}{3}$，

∴ $\bar{x}-s=36\dfrac{2}{3}$，$\bar{x}+s=43\dfrac{1}{3}$，

∴ 年龄在 $\bar{x}-s$ 与 $\bar{x}+s$ 之间共有 23 人，所占百分比为 $\dfrac{23}{36}\approx 63.89\%$．

【考点定位】本题考查系统抽样、样本的均值与方差、样本数据统计等知识，属于中档题．

18．（本小题满分 14 分）

如图 2，三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直，$PD=PC=4$，$AB=6$，$BC=3$．

点E是CD边的中点，点F、G分别在线段AB、BC上，且$AF=2FB$，$CG=2GB$.

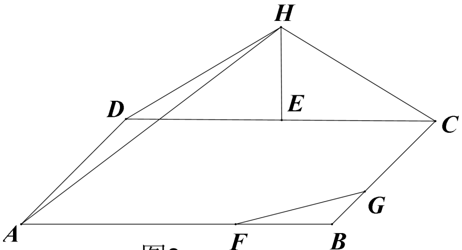


图2

（1）证明：$PE\perp FG$；

（2）求二面角$P-AD-C$的正切值；

（3）求直线PA与直线FG所成角的余弦值.

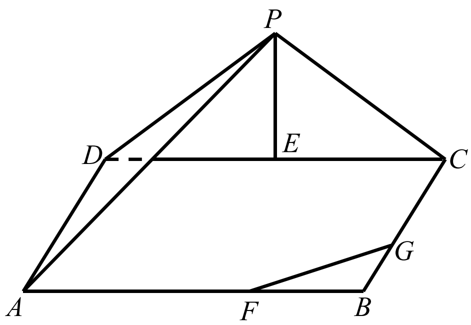
【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$；（3）$\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$.

【解析】（1）证明：∵ $PD=PC$且点E为CD的中点，

∴ $PE\perp DC$，又平面$PDC\perp$平面$ABCD$，且平面$PDC\cap$平面$ABCD=CD$，$PE\subset$平面PDC，

∴ $PE\perp$平面$ABCD$，又$FG\subset$平面$ABCD$，

∴ $PE\perp FG$；



（2）∵ $ABCD$是矩形，

∴ $AD\perp DC$，又平面$PDC\perp$平面$ABCD$，且平面$PDC\cap$平面$ABCD=CD$，$AD\subset$平面$ABCD$，

∴ $AD\perp$平面PCD，又CD、$PD\subset$平面PDC，

∴ $AD\perp DC$，$AD\perp PD$，

∴ $\angle PDC$即为二面角$P-AD-C$的平面角，

在$Rt\Delta PDE$中，$PD=4$，$DE=\dfrac{1}{2}AB=3$，$PE=\sqrt{PD^2-DE^2}=\sqrt{7}$，

∴ $\tan\angle PDC=\dfrac{PE}{DE}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$即二面角$P-AD-C$的正切值为$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$；

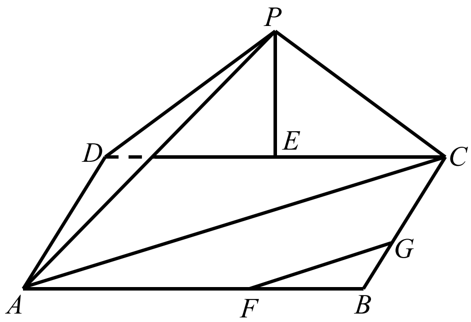
（3）如下图所示，连接 AC，

∵ $AF=2FB$， $CG=2GB$ 即 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CG}{GB}=2$，

∴ $AC//FG$，

∴ $\angle PAC$ 为直线 PA 与直线 FG 所成角或其补角，

在 ΔPAC 中， $PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=5$， $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=3\sqrt{5}$，



由余弦定理可得 $\cos\angle PAC=\dfrac{PA^2+AC^2-PC^2}{2PA\cdot AC}=\dfrac{5^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2-4^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$，

∴ 直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值为 $\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$.

【考点定位】本题考查直线与直线垂直、二面角、异面直线所成角等知识，属于中档题.

19.（**本小题满分 14 分**）

设 $a>1$，函数 $f(x)=(1+x^2)e^x-a$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ；

(2) 证明： $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有一个零点；

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行，且在点 $M(m,n)$ 处的切线与直线 OP 平行（ O 是坐标原点），证明： $m\le\sqrt[3]{a-\dfrac{2}{e}}-1$.

【答案】（1） $(-\infty,+\infty)$；（2）见解析；（3）见解析.

【解析】（1）依题 $f'(x)=(1+x^2)'e^x+(1+x^2)(e^x)'=(1+x)^2e^x\ge0$，

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数；

（2）$\because$ $a>1$，

$\therefore$ $f(0)=1-a<0$ 且 $f(a)=(1+a^2)e^a-a>1+a^2-a>0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有零点，

又由（1）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数，

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有一个零点；

（3）由（1）知令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$，又 $f(-1)=\frac{2}{e}-a$，即 $P\left(-1,\frac{2}{e}-a\right)$，

$\therefore$ $k_{OP}=\dfrac{\frac{2}{e}-a-0}{-1-0}=a-\frac{2}{e}$，又 $f'(m)=(1+m)^2e^m$，

$\therefore$ $(1+m)^2e^m=a-\frac{2}{e}$，

令 $g(m)=e^m-m-1$，则 $g'(m)=e^m-1$，

$\therefore$ 由 $g'(m)>0$ 得 $m>0$，由 $g'(m)<0$ 得 $m<0$，

$\therefore$ 函数 $g(m)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ $g(m)_{\min}=g(0)=0$，即 $g(m)\geq 0$ 在 R 上恒成立，

$\therefore$ $e^m\geq m+1$，

$\therefore$ $a-\frac{2}{e}=(1+m)^2e^m\geq(1+m)^2(1+m)=(1+m)^3$ 即 $\sqrt[3]{a-\frac{2}{e}}\geq 1+m$，

$\therefore$ $m\leq\sqrt[3]{a-\frac{2}{e}}-1$．

【考点定位】本题考查导数与函数单调性、零点、不等式等知识，属于中高档题．

20．（**本小题满分 14 分**）

已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A，B．

（1）求圆 C_1 的圆心坐标；

（2）求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程；

（3）是否存在实数 k，使得直线 $L: y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个交点：若存在，求出 k 的取值范围；

若不存在，说明理由.

【答案】(1) $(3,0)$；(2) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\left(\frac{5}{3}<x\le 3\right)$；(3) $k\in\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}\cup\left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]$.

【解析】(1) 由 $x^2+y^2-6x+5=0$ 得 $(x-3)^2+y^2=4$，

∴ 圆 C_1 的圆心坐标为 $(3,0)$；

(2) 设 $M(x,y)$，则

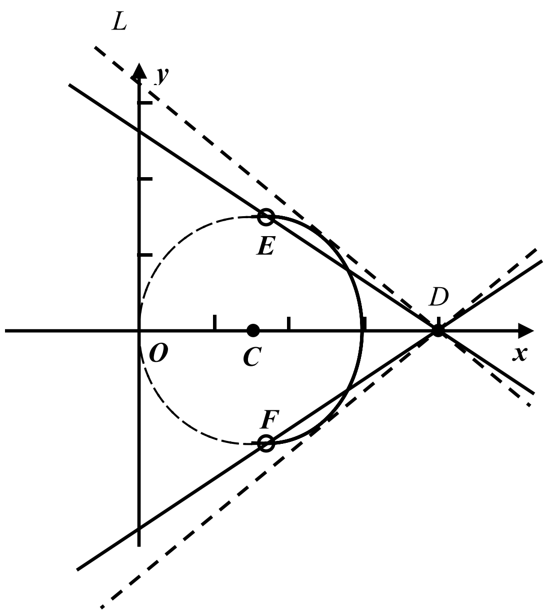
∵ 点 M 为弦 AB 中点即 $C_1M\perp AB$，

∴ $k_{C_1M}\cdot k_{AB}=-1$ 即 $\frac{y}{x-3}\cdot\frac{y}{x}=-1$，

∴ 线段 AB 的中点 M 的轨迹的方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\left(\frac{5}{3}<x\le 3\right)$；

(3) 由 (2) 知点 M 的轨迹是以 $C\left(\frac{3}{2},0\right)$ 为圆心 $r=\frac{3}{2}$ 为半径的部分圆弧 EF（如下图所示，不包括两端点），

且 $E\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$F\left(\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，又直线 L：$y=k(x-4)$ 过定点 $D(4,0)$，



当直线 L 与圆 C 相切时，由 $\frac{\left|k\left(\frac{3}{2}-4\right)-0\right|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{3}{2}$ 得 $k=\pm\frac{3}{4}$，又 $k_{DE}=-k_{DF}=-\frac{0-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)}{4-\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$，结合上

图可知当$k \in \left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\} \cup \left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]$时，直线$L$：$y=k(x-4)$与曲线$C$只有一个交点.

【考点定位】本题考查圆的标准方程、轨迹方程、直线斜率等知识与数形结合思想等应用，属于中高档题.

21.（本小题满分 14 分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+\cdots+na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$，$n \in N^*$.

(1) 求a_3的值；

(2) 求数列$\{a_n\}$前n项和T_n；

(3) 令$b_1=a_1$，$b_n=\frac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n\ (n \ge 2)$，证明：数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$

满足$S_n<2+2\ln n$

【答案】(1) $\frac{1}{4}$；(2) $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；(3) 见解析.

【解析】(1) 依题$3a_3=(a_1+2a_2+3a_3)-(a_1+2a_2)=4-\frac{3+2}{2^{3-1}}-\left(4-\frac{2+2}{2^{2-1}}\right)=\frac{3}{4}$，

$\therefore a_3=\frac{1}{4}$；

(2) 依题当$n>1$时，$na_n=(a_1+2a_2+\cdots na_n)-\left[a_1+2a_2+\cdots(n-1)a_{n-1}\right]=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}-\left(4-\frac{n+1}{2^{n-2}}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$，

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，又$a_1=4-\frac{1+2}{2^0}=1$也适合此式，

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，故$T_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；

(3) 依题由$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n$知$b_1=a_1$，$b_2=\frac{a_1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2$，

$b_3=\dfrac{a_1+a_2}{3}+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)a_3$，

$\therefore\ S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)T_n$

$=\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)<2\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$，

记 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1(x>1)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}>0$，

$\therefore\ f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，又 $f(1)=0$ 即 $f(x)>0$，

又 $k\geq 2$ 且 $k\in N^*$ 时，$\dfrac{k}{k-1}>1$，

$\therefore\ f\left(\dfrac{k}{k-1}\right)=\ln\dfrac{k}{k-1}+\dfrac{1}{\frac{k}{k-1}}-1>0$ 即 $\ln\dfrac{k}{k-1}>\dfrac{1}{k}$，

$\therefore\ \dfrac{1}{2}<\ln\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{1}{3}<\ln\dfrac{3}{2}$，…，$\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{n}{n-1}$，即有 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{2}{1}+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n}{n-1}=\ln n$，

$\therefore\ 2\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)<2+2\ln n$，即 $S_n<2+2\ln n$．

【考点定位】本题考查递推数列求项值、通项公式、等比数列前 n 项和、不等式放缩等知识，属于中高档题．